Partie 13

Notions scientifiques de base

13/0

Table des matières

13/1

Introduction à l'électronique

Cette partie est destinée à tous ceux qui ont l'intention de construire puis de rajouter une ou plusieurs cartes additionnelles sur leur AMSTRAD. La réalisation de telles cartes fait appel à des notions d'électronique analogique et logique qui seront développées ici.

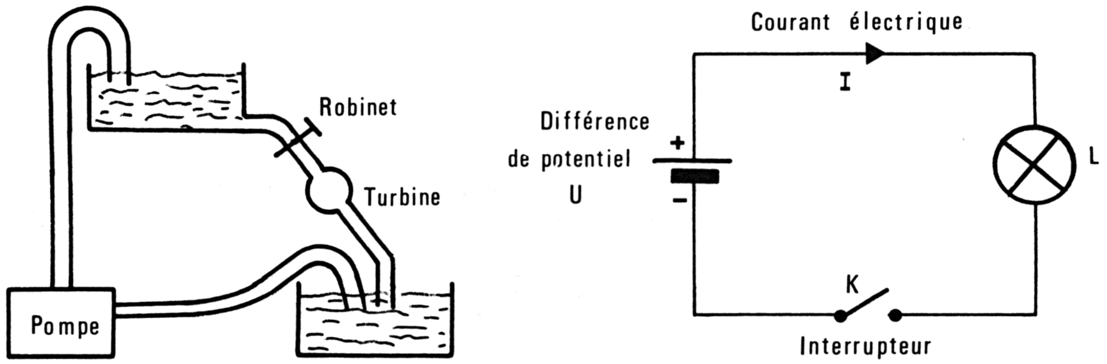
L'électronique logique concerne tous les composants (transistors, circuits intégrés, microprocesseurs, etc.) qui manipulent des niveaux de tension, alors que l'électronique analogique concerne tous les composants qui manipulent des tensions continues ou alternatives qui n'ont pas des niveaux fixes prédéfinis. Dans la suite, nous allons développer séparément ces deux types d'électronique.

13/1.1

Electronique analogique

I. Notions fondamentales

L'électronique analogique manipule deux grandeurs fondamentales : les tensions et les courants. Pour bien comprendre la signification de ces grandeurs, nous allons faire un parallèle avec un circuit hydraulique.



Le robinet est comparable à l'interrupteur, la turbine à la lampe, la pompe et le réservoir au générateur. Le débit de l'eau correspond au débit d'électricité ou intensité I dans le circuit. La dénivellation entre les deux plans d'eau correspond à la différence de potentiel aux bornes du générateur U.

Poursuivons l'analogie entre électricité et hydraulique :

Le débit d'eau dépend de :

— la dénivellation des deux plans d'eau,

— la résistance de la turbine.

L'intensité dépend de :

— la différence de potentiel aux bornes du générateur,

— la résistance de la lampe.

Le débit est le même tout le long du tuyau.

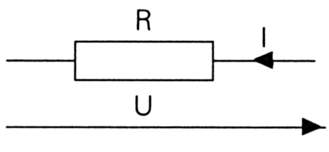
L'intensité est la même en tout point du circuit électrique.

LES RESISTANCES

Loi d'Ohm :

La tension aux bornes d'un dipôle est reliée à sa résistance et au courant qui le traverse par la loi d'Ohm :

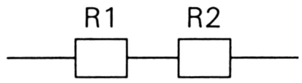
$$U = R \, . \, I$$



Montages série et parallèle :

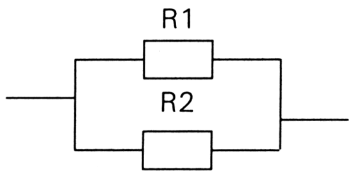
Deux résistances en série s'ajoutent

$$R = R1 + R2$$



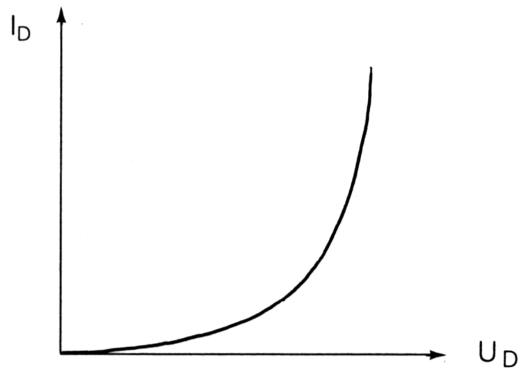
Deux résistances en parallèle sont reliées par la loi :

$$R = R1 \,.\, R2 \,/\, (R1 + R2)$$



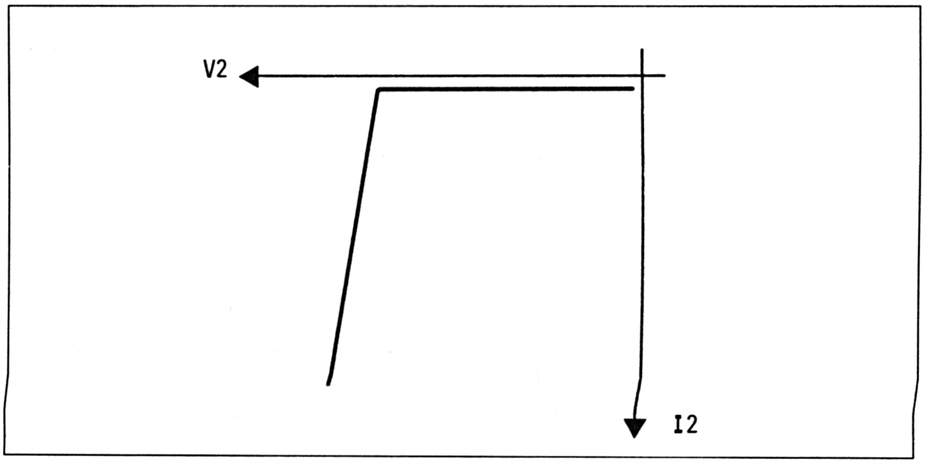
Les diodes :

Ce sont des composants non linéaires (dont la courbe $I = f(U)$ n'est pas linéaire) qui présentent deux bornes et se laissent traverser par un courant dans un seul sens. La tension aux bornes d'une diode suit la courbe suivante :



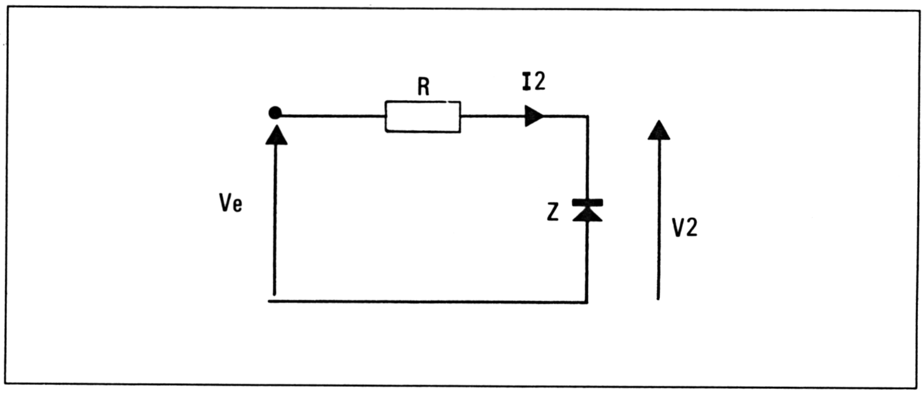
Les diodes Zéner sont des diodes spécialement utilisées pour réaliser des circuits stabilisateurs de tension continue.

La caractéristique courant-tension d'une diode Zéner est la suivante :



Nous voyons donc que ce composant peut servir à stabiliser une tension continue (la tension à ses bornes varie peu quand le courant qui le traverse varie) lorsqu'on le monte en inverse.

Le montage le plus classique est le suivant :



Nous avons Ve = R Iz + Vz

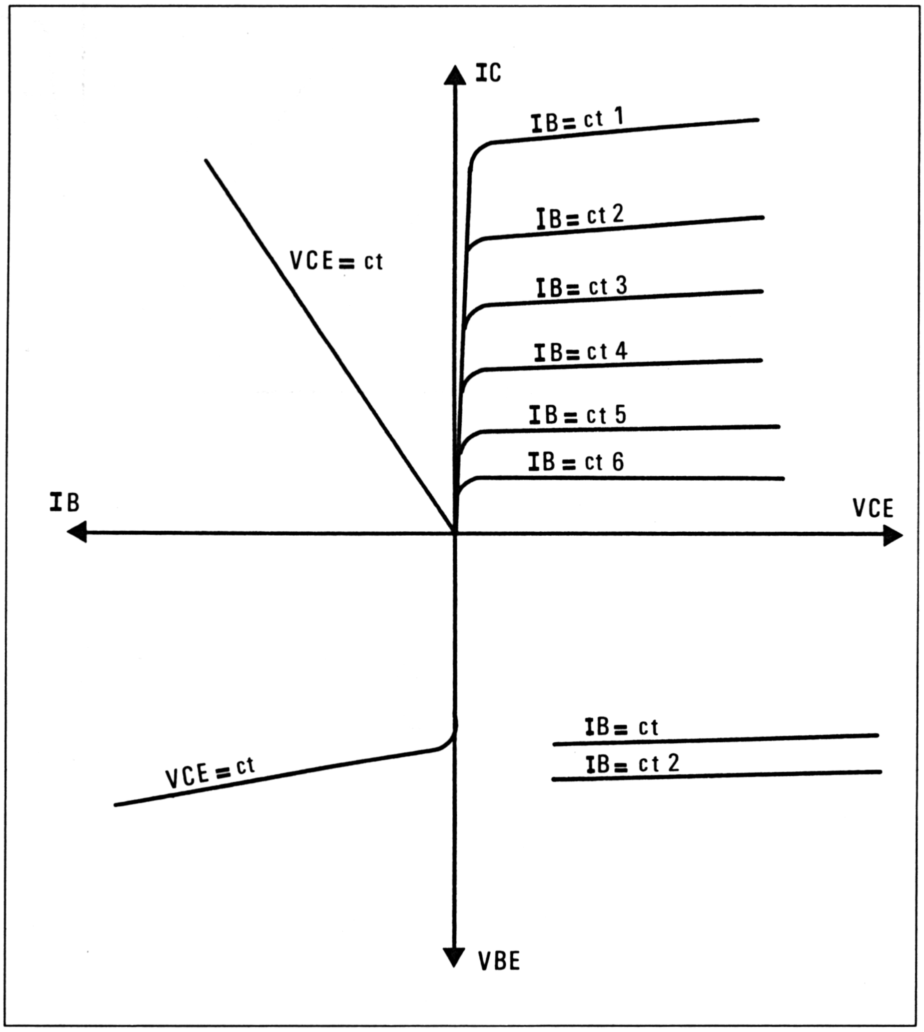
d'où R = (Ve − Vz)/Iz

ce qui nous permettra, connaissant la tension zéner Vz, la tension d'alimentation Ve et les limites supérieure et inférieure de variation du courant, de choisir une résistance appropriée de telle sorte que :

(Ve − Vz)/Iz max < R < (Ve − Vz)/Iz min

Les transistors :

Ces composants possèdent trois broches appelées base, collecteur et émetteur. Les caractéristiques d'un transistor classique sont les suivantes :

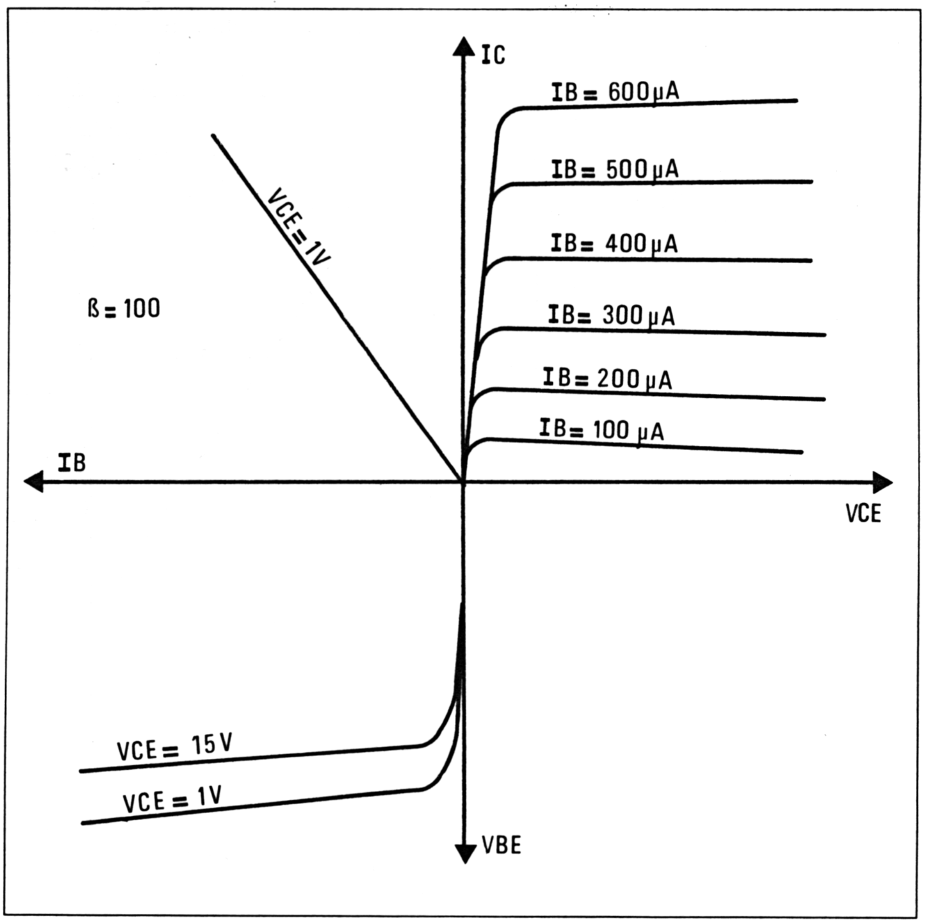


Le courant Ic passant dans le collecteur du transistor est relié au courant Ib par une loi linéaire du type :

Ic = B Ib + IceO

Remarque : IceO est très faible devant β Ib et souvent négligé.

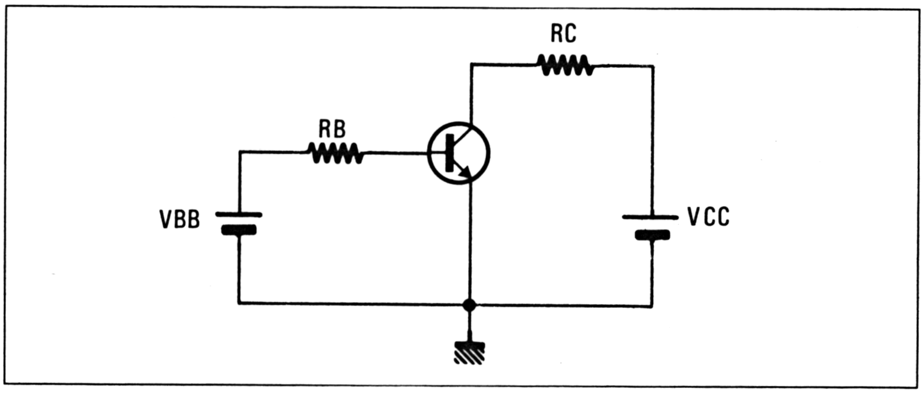
Par exemple, sur le transistor 2N 3391 dont les caractéristiques sont les suivantes :



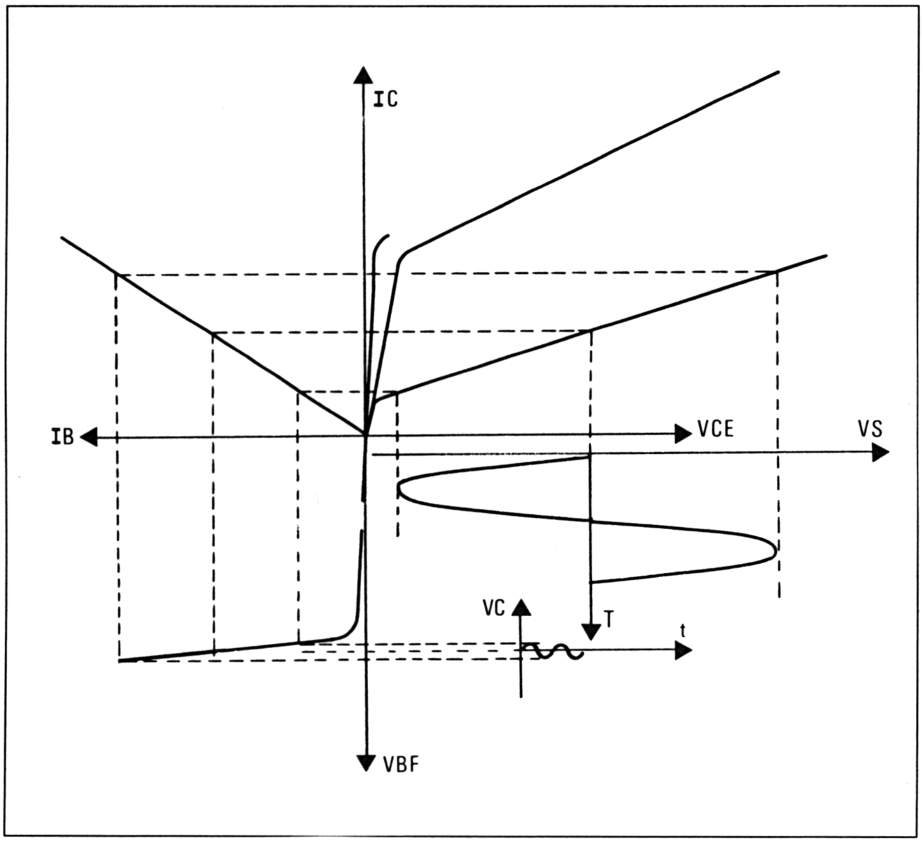
on a Ic ≃ 100 Ib

- *Le transistor utilisé en amplificateur*

Soit le montage suivant :



Si nous envoyons à l'entrée une tension alternative, elle sera amplifiée et disponible au niveau du collecteur. Nous pouvons mettre en évidence cette amplification en nous servant des caractéristiques du transistor :



• *Le transistor en commutation*

Un transistor classique peut être utilisé en « tout ou rien », c'est-à-dire que sa sortie peut occuper deux paliers : un bas et un haut. Dans ce cas, on dit que le transistor travaille en commutation. Le seuil bas est atteint lorsque le transistor est « saturé ». Le seuil haut est atteint lorsque le transistor est « bloqué ».

Pour saturer un transistor, il faut lui fournir une tension Vbe supérieure à 0,8 volts pour un transistor au Silicium et 0,4 volts pour un transistor au Germanium.

Cette tension produit un courant de saturation Ib sat qui a pour valeur :

Ib sat = Ic sat/β min

Prenons l'exemple suivant pour clarifier la notion de saturation :

Nous avons Ib sat = Ic sat/β min = 0.75 mA.

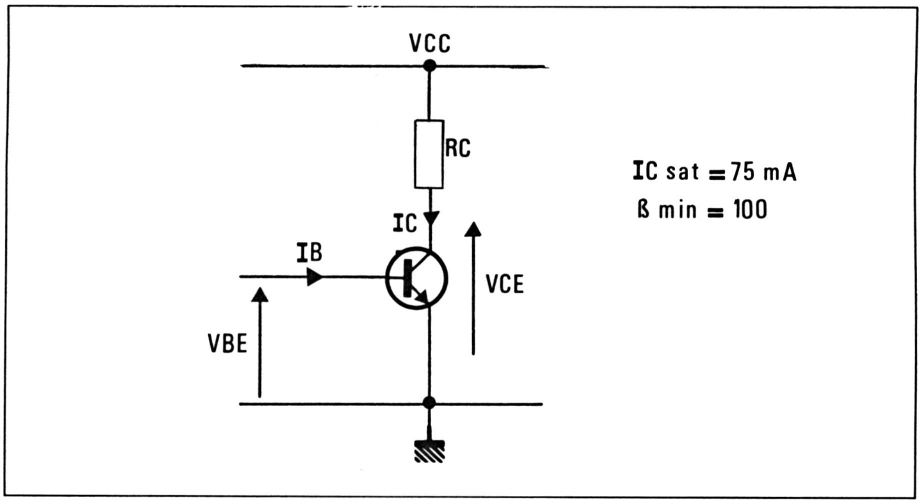
Pour être sûr que le transistor est saturé, nous allons appliquer un coefficient de « sur-saturation » à la valeur de Ib sat précédente. Dans la pratique, ce coefficient sera choisi entre 1 et 3. Nous le prendrons égal à 2 dans notre exemple.

Nous avons donc : Ib = K Ibsat = 2 × 0.75 = 1.5 mA

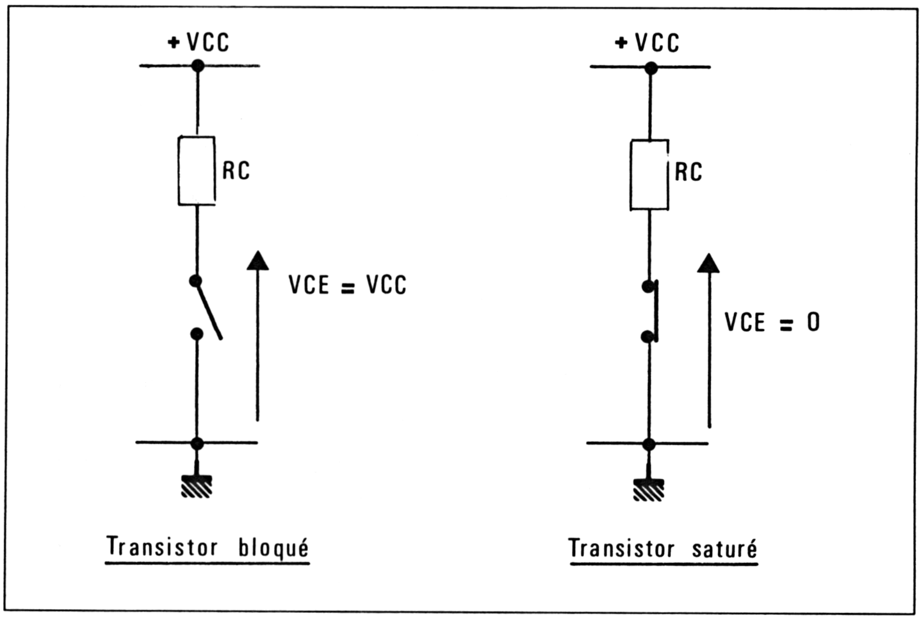
La résistance Rb aura donc pour valeur :

Rb = (Vcc − Vbe) / Ib = (12 − 0.8)/1.5 = 7.46 K

Pour bloquer un transistor, il faudra envoyer sur sa base une tension voisine de 0V. Dans ce cas, aucun courant ne passera sur la sortie. La tension disponible entre collecteur et émetteur sera égale à la tension d'alimentation Vcc.



Pour schématiser, nous pouvons dire qu'un transistor saturé est équivalent à un interrupteur fermé, alors qu'un transistor bloqué est équivalent à un interrupteur ouvert.



II. Tension – Différence de potentiels et courants

Afin de vous permettre de mieux maîtriser le fonctionnement des cartes-mères des Amstrad CPC, nous vous proposons, dans ce chapitre, d'aborder les connaissances de base sur les tensions et les courants mis en œuvre lors du fonctionnement de votre micro-ordinateur.

Le potentiel

Une expérience classique réalisée lors de l'apprentissage scolaire de la physique, consistait à frotter, sur un morceau de laine, un objet en plastique et à l'approcher d'une feuille de papier à cigarette. On constatait, lorsque l'expérience n'était pas soumise à la loi de Murphy (*), que la feuille était attirée par l'objet.

On en déduisait ainsi que des charges électriques s'étaient déposées sur l'objet en plastique, donc qu'il s'était chargé, et qu'il supportait un certain potentiel.

Une autre constatation était de s'apercevoir que si l'on posait la main sur l'objet et la feuille de papier attirée, cette dernière n'était plus attirée (ou beaucoup moins) et finissait par tomber. L'objet avait perdu son potentiel.

La différence de potentiel – La tension – Le courant

Nous pouvons considérer que la différence de potentiel (d.d.p.) est en relation directe avec la différence de charge entre deux objets possédant un certain potentiel (le potentiel de l'un des objets pouvant éventullement être nul).

En électronique, la différence de potentiel entre deux points est très souvent appelée tension.

Lorsque l'on relie ensemble les deux points par un fil électrique (conducteur), il y a circulation de charges (courant) depuis le point possédant le plus fort potentiel vers celui de plus faible potentiel.

Selon la taille du conducteur, plus ou moins de charges pourront passer en même temps, on dit que le conducteur offre une résistance au passage du courant.

Pour imager nos précédents propos, nous allons considérer la vie de Paris et sa banlieue au petit matin d'une semaine de travail, en supposant que tous les travailleurs parisiens passent leur nuit dans leur pavillon de banlieue.

(*) Note : Murphy : personnage légendaire d'origine anglo-saxonne dont la 1ère loi dite « de la tartine beurée » est tristement célèbre ; énoncé : pourquoi tout irait bien alors qu'il est si simple que tout aille mal.

Au petit matin, vers 6 h 30, la banlieue possède donc un certain potentiel (de travailleurs). En exagérant un peu, nous considérerons qu'aucun travailleur n'était dans Paris auparavant : le potentiel de Paris est donc nul.

Si tout le monde s'élance sur les autoroutes, il se crée un certain courant de voitures, plus ou moins important selon le nombre de voies.

Puis, l'inévitable arrive : l'entrée sur le périphérique, avec le rétrécissement des voies provoquant la réduction du courant qui se répercute en amont. Il y a donc résistance au passage du courant.

Bien que simplifiée cette image illustre partiellement la circulation du courant entre deux bornes présentant une différence de potentiel.

Plus classique en électronique, l'exemple d'une cuve remplie d'eau en haut d'une colline, présente une différence de potentiel (ou tension, en eau) avec la vallée. Si l'on relie la cuve par une tuyauterie adéquate, il y aura circulation (courant) d'eau plus ou moins importante selon le diamètre des canalisations (résistance).

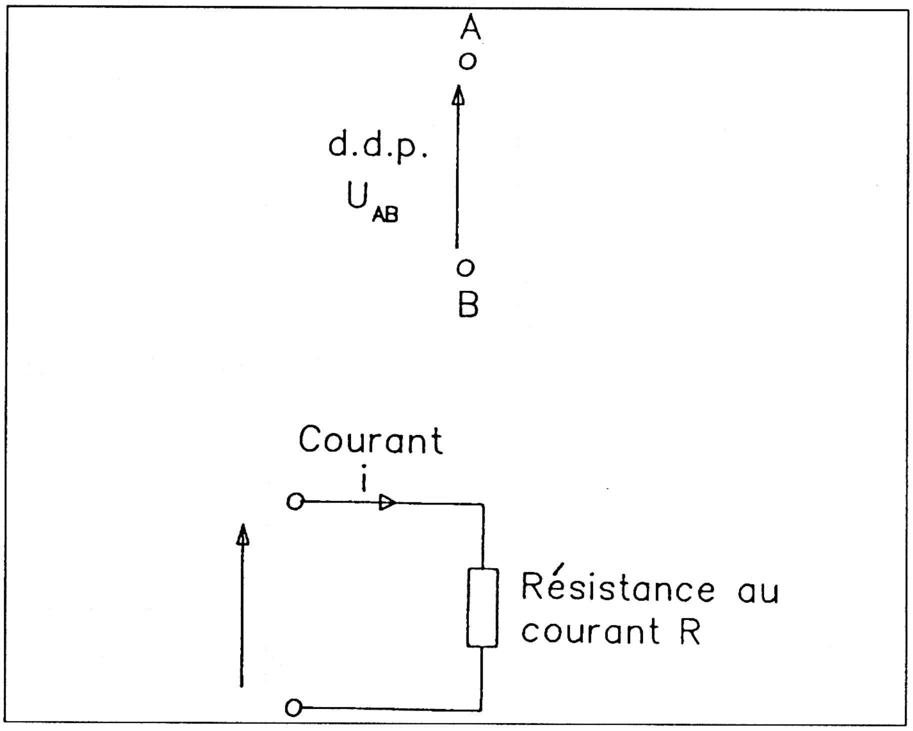
Les notations classiques pour la tension utilisent les lettres alphabétiques **U** ou **V** en majuscule ou minuscule selon le type de tension, que nous expliquerons plus loin.

On utilise plus généralement la lettre **I** (ou i) pour la notation du courant.

La représentation d'une tension s'effectue par une flèche dont la pointe est en général dirigée vers le point de potentiel le plus élevé, si l'on veut que cette tension soit positive. Inverser le sens de la flèche revient à changer de signe la tension.

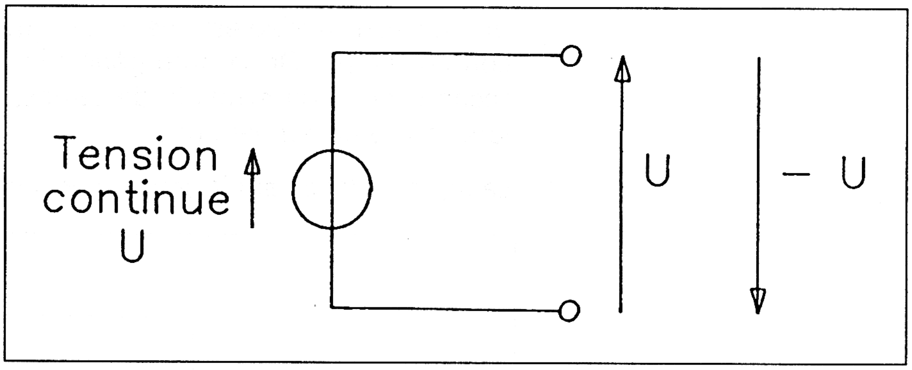
De même pour le courant, on utilise une flèche placée sur le conducteur, qui indique une valeur positive si le sens de circulation est le même que celui de la flèche, négative dans le sens contraire.

Les unités utilisées pour la tension et le courant sont respectivement le Volt (V) et l'Ampère (A), avec tous les sous-multiples possibles en cas de très faibles valeurs (pA, mV, mA, mV, ...). En grandes valeurs, on trouve rarement des valeurs supérieures au Kilo (kV).



LA TENSION CONTINUE

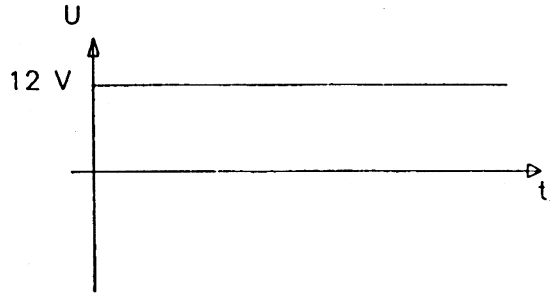
Une tension est une différence de potentiel dont la valeur est constante. Elle est généralement notée par une lettre majuscule **U** ou **V**, comme représentée ci-dessous, et quelquefois accompagnée par une double barre **U** ou V, mais peu pratique à noter.



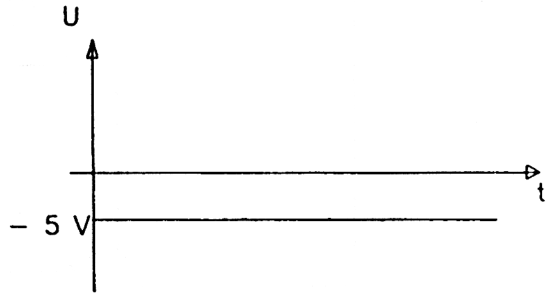
Le courant, lui, circule dans un seul sens.

Un exemple de tension continue est la batterie de votre voiture, ou une pile. La borne **+** représente le point de potentiel le plus élevé, la borne **-** le potentiel le moins élevé.

On peut ainsi représenter en fonction du temps une tension continue par une droite à valeur constante.



Tension continue positive de + 12 V



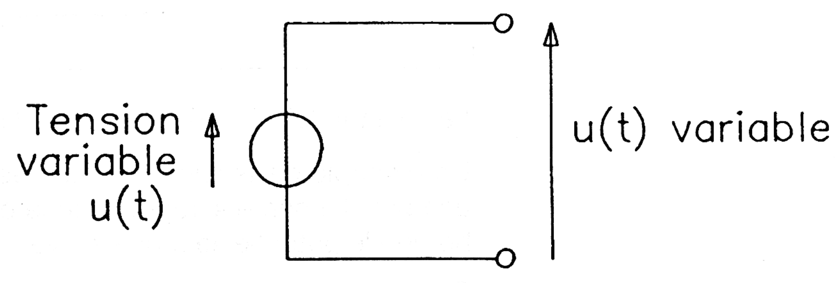
Tension continue négative de – 5 V

La tension variable

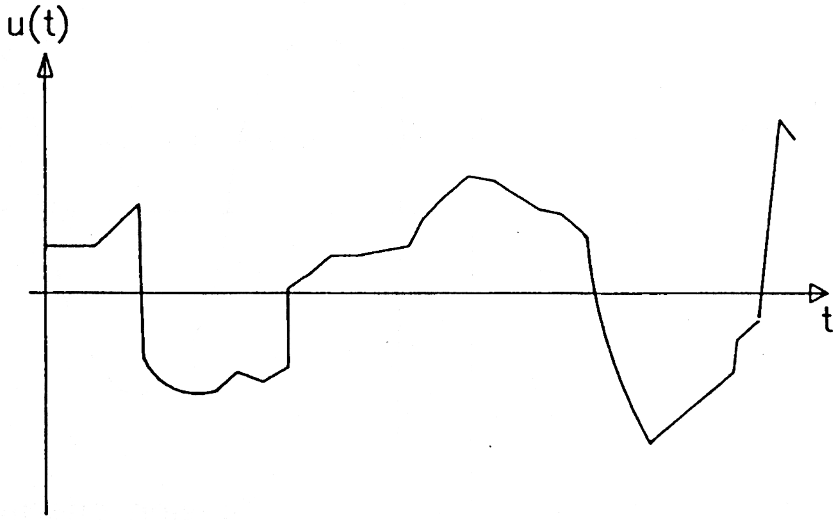
Tension variable quelconque

Une tension variable est une tension qui n'est pas constante en fonction du temps. On la note généralement par une lettre minuscule accompagnée du symbole de temps, pour préciser sa variation en fonction de ce dernier : **u(t)**.

La représentation sur le schéma est donnée ci-dessous :



En fonction du temps, vous trouverez ci-dessous, le chronogramme d'une tension variable quelconque.



Tension variable quelconque

Tension sinusoïdale

Une tension sinusoïdale est une tension quelconque particulière dont la valeur varie dans le temps selon la forme d'une sinusoïde.

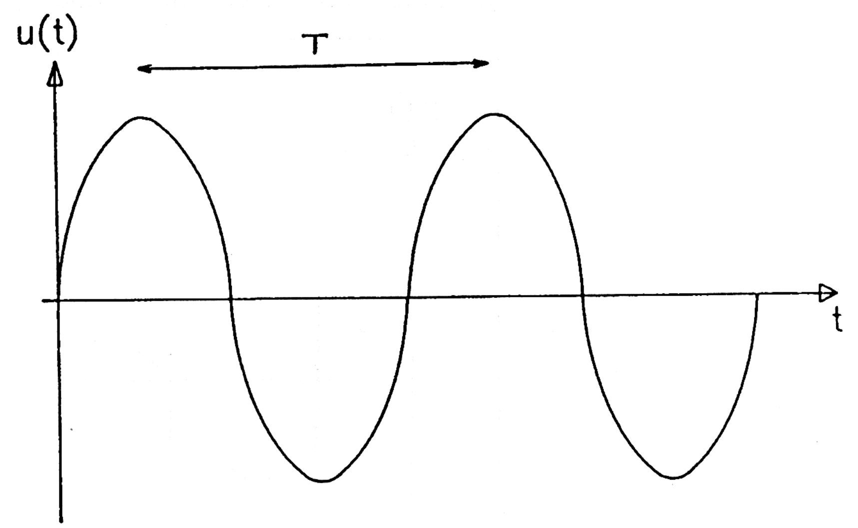
L'équation d'une telle tension est donnée par la formule :

u(t) = Umax x sin (2 x PI x f x t).

PI étant le nombre bien connu, approximativement égal à 3,14.

f étant la fréquence du signal, exprimé en Hetz (Hz), c'est-à-dire le nombre de fois qu'il se répète en une seconde. A partir de cette valeur f, il est possible de déterminer ce que l'on appelle la période, représentée en figure suivante, et calculée par la formule **T = 1/f.**

Pour les besoins du calcul électronique, on peut déterminer la valeur efficace d'un signal sinusoïdal par la formule : **Ueff = Umax/$\sqrt{2}$.** Cette valeur efficace de la tension correspond à la valeur d'une tension continue qui produirait le même dégagement de chaleur si elle se trouvait, dans le même temps, aux bornes d'un même élément résistif.



Tension alternative sinusoïdale

Ainsi, il est possible de réécrire l'équation d'une tension sinusoïdale par :

$$u(t) = Ueff \times \sqrt{2} \times \sin(2 \times PI \times f \times t)$$

Par exemple, notre dangereux, mais si utile, 220 V est une tension sinusoïdale de valeur efficace égale à 220 V, et de fréquence 50 Hz. Ainsi la tension sur une prise domestique varie-t-elle entre

$$-Umax = -220 \times \sqrt{2} = -311\ V \text{ et } Umax = +220 \times 2 = 311\ V.$$

Nous vous proposons ci-dessous d'utiliser votre ordinateur Amstrad CPC pour mettre à profit ces nouvelles connaissances sur la tension sinusoïdale, par un programme de tracé d'une tension alternative sinusoïdale en fonction du temps.
Ce programme vous demande la valeur efficace de la tension, ainsi que sa fréquence.

Le tracé s'effectue automatiquement, et précise sur le chronogramme les valeurs maximales, minimales et la période.

Il vous rappelle aussi l'équation.

```
10 REM ********************************
20 REM *      PROGRAMME DE TRACE       *
30 REM *  D'UNE TENSION SINUSOIDALE    *
40 REM ********************************
50 REM
60 MODE 2
70 PRINT "TRACE D'UNE TENSION SINUSOIDAL
E"
80 PRINT
90 PRINT
100 REM
110 REM *** ACQUISITION DES PARAMETRES *
**
120 REM
130 INPUT "Valeur de la tension efficace
";uefficace
140 INPUT "Valeur de la frequence";frequ
ence
150 REM
160 REM *** VALEUR MAXI ET PERIODE ***
170 REM
180 umaxi = uefficace * SQR (2)
190 periode = 1 / frequence
200 REM
210 REM *** EQUATION ***
220 REM
230 equation$ = STR$(ROUND(umaxi,2)) + "
 * sin ( 2 * PI * " + STR$(frequence) +
" * t )"
240 REM
250 REM *** TRACE DES AXES ***
260 REM
270 MODE 2
280 LOCATE 74,14:PRINT "temps"
290 LOCATE 2,1:PRINT "Tension"
300 MOVE 20,400
310 DRAW 20,0,1
320 MOVE 0,200
330 DRAW 640,200,1
340 REM
350 REM *** rapport de proportion ***
360 REM
370 proportionx = 540 / 2 / periode
380 proportiony = 150 / umaxi
390 REM
400 REM *** ORIGINE DE LA COURBE ***
410 REM
420 MOVE 20,200:ORIGIN 20,200
430 REM
```

```
440 REM *** TRACE DE LA COURBE ***
450 REM
460 FOR temps = 0 TO 2 * periode + perio
de / 20 STEP periode / 100
470 tension = umaxi * SIN ( 2 * PI * fre
quence * temps)
480 urelative = tension * proportiony:'P
RINT urelative
490 trelatif = temps * proportionx
500 DRAW trelatif,urelative
510 NEXT
520 REM
530 REM *** AFFICHAGE PARTICULIERS ***
540 LOCATE 10,3
550 PRINT "Umax =";
560 PRINT ROUND (umaxi,2);
570 PRINT "V"
580 LOCATE 30,23
590 PRINT "Umin = -";
600 PRINT ROUND (umaxi,2);
610 PRINT "V"
620 LOCATE 37,14
630 PRINT "T = ";
640 PRINT ROUND(periode,2);
650 PRINT"s"
660 REM
670 REM *** EQUATION ET PARAMETRES ***
680 REM
690 LOCATE 25,1
700 PRINT "u(t) = ";
710 PRINT equation$
```

Commentaires :

Lignes 130 à 140 : Acquisition des paramètres.
Lignes 180 et 190 : Calcul de Umax et de la période.
Ligne 230 : Détermination de l'équation.
Lignes 250 à 330 : Tracé des axes.
Lignes 370 et 380 : Calcul du rapport de proportionnalité pour afficher 2 périodes et la tension totale sur l'écran du CPC.
Ligne 420 : Modification de l'origine de l'écran pour démarrer à l'origine de la courbe.
Lignes 460 à 510 : Calcul des coordonnées à partir de l'équation et tracé de la sinusoïde.
Lignes 540 à 710 : Affichage des tensions maximales et minimales, période et équation.

III. Les condensateurs fixes

Afin d'apporter quelques notions sur les condensateurs, et pour approfondir les connaissances de certains d'entre-vous concernant l'électronique et les applications informatiques utiles pour le calcul électronique, nous avons choisi dans ce chapitre, de vous donner quelques notions de base sur les différents types de condensateurs existants.

Ces notions seront accompagnées d'un programme, type programme expert, permettant à ceux d'entre-vous qui se sont lancés dans la conception, d'effectuer des choix technologiques, en fonction de différents paramètres concernant leur application électronique.

GÉNÉRALITÉS SUR LE CONDENSATEUR

Principe et utilité

Les condensateurs sont d'un emploi très fréquent dans les montages électroniques, et permettent de réaliser une grande variété de fonctions.

Le principe de base du condensateur est de conserver une certaine quantité de charge électrique pour la restituer, soit complètement, soit partiellement, ultérieurement (quand nous disons ultérieurement, nous faisons intervenir une échelle de temps qui est le plus souvent inférieure à la seconde, de l'ordre de la micro-seconde dans le cas des structures à microprocesseur).

Constitution générale

Le matériau de base d'un condensateur est un isolant, appelé diélectrique, autour duquel on a placé deux électrodes conductrices, appelées armatures, qui permettront l'accumulation d'énergie électrique (voir figure 1).

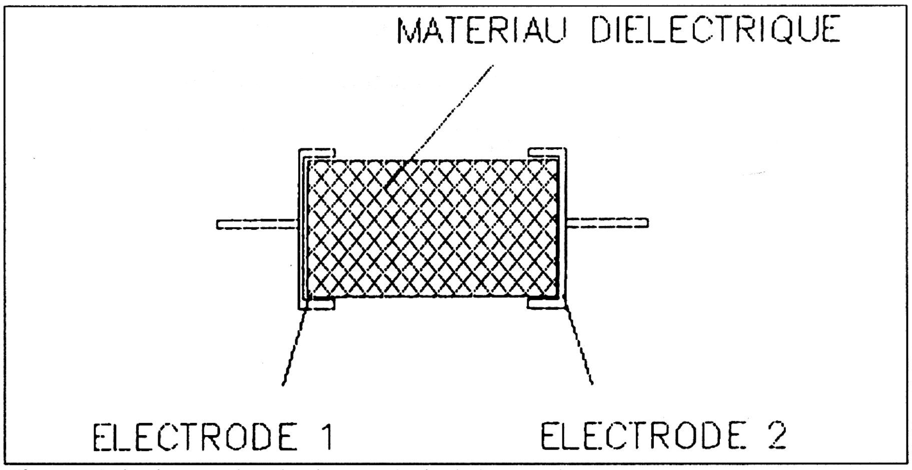


Fig. 1 : Principe technologique général du condensateur.

Il est possible, à partir des constituants du condensateur, de déterminer la grandeur appelée capacité. Celle-ci est évaluée dans une unité désignée, le farad (F), selon la formule suivante :

$$C = \epsilon_r \times \epsilon_o \times S / e$$

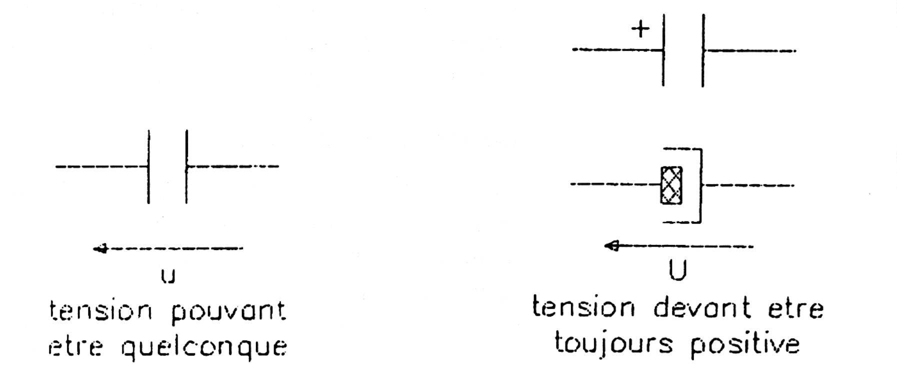
avec

ϵ_r = la permittivité relative du diélectrique
$\epsilon_o = 10^{-9} / 113$, la permittivité du vide
S = la surface d'une armature
e = l'épaisseur du diélectrique

Les valeurs les plus courantes s'étendent du picofarad (pF = 10^{-12} F) à quelques milliers de microfarad (µF = 10^{-6} F), en passant par le nanofarad (nF = 10^{-9} F). Des valeurs de quelques farads se rencontrent, mais sont destinées à des applications de sauvegardes mémoire dans les systèmes à microprocesseur, et leur prix est encore prohibitif pour l'amateur.

Symbole

La présence d'électrodes séparées par un diélectrique a permis de représenter le condensateur selon la figure 2.



Condensateur non polarisé

Condensateur polarisé

Fig. 2

Le composant physique

Vous trouverez en figures 3 et 4 un aperçu des boîtiers de différents types de condensateurs.

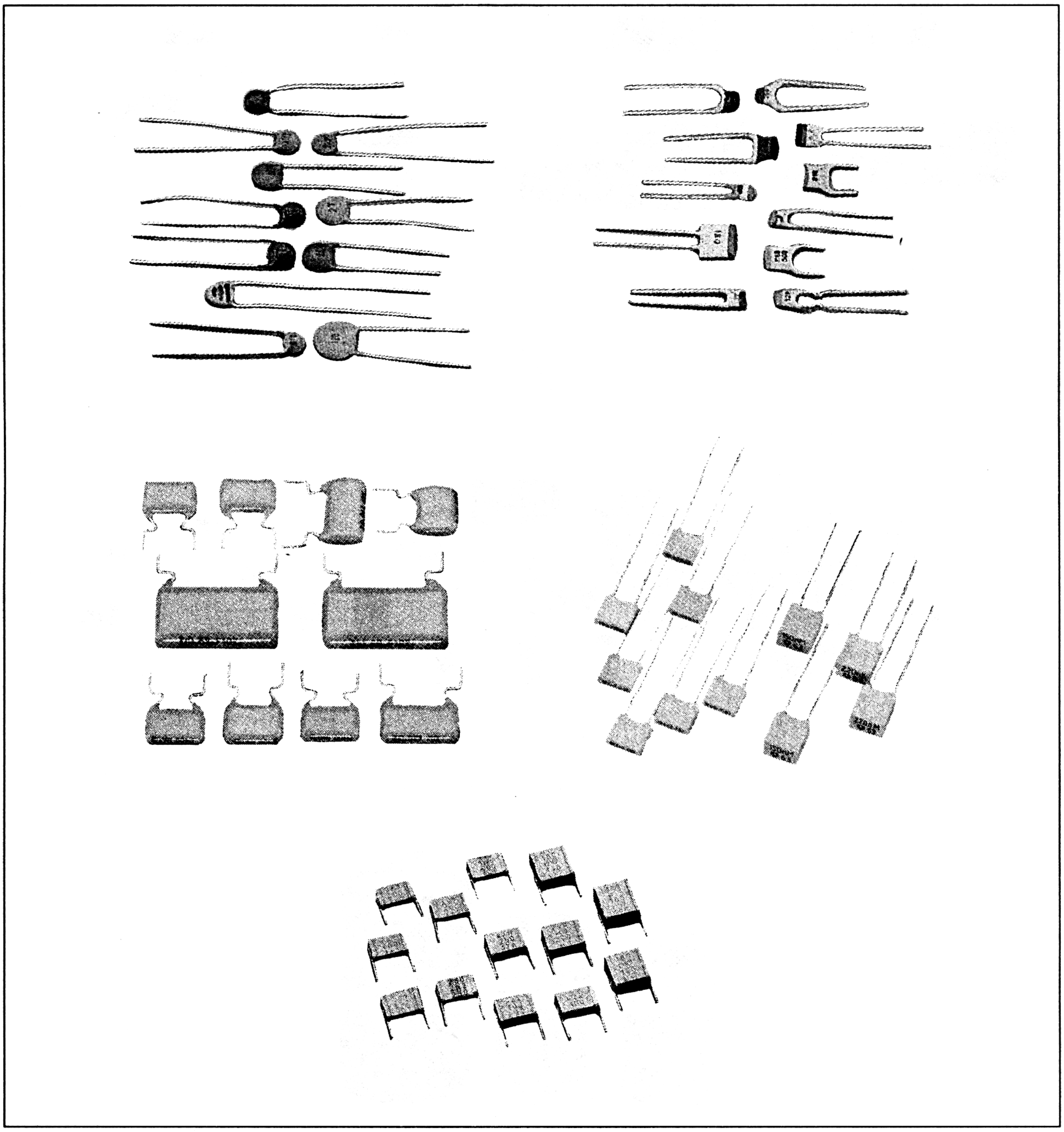


Fig. 3 : Condensateurs non polarisés.

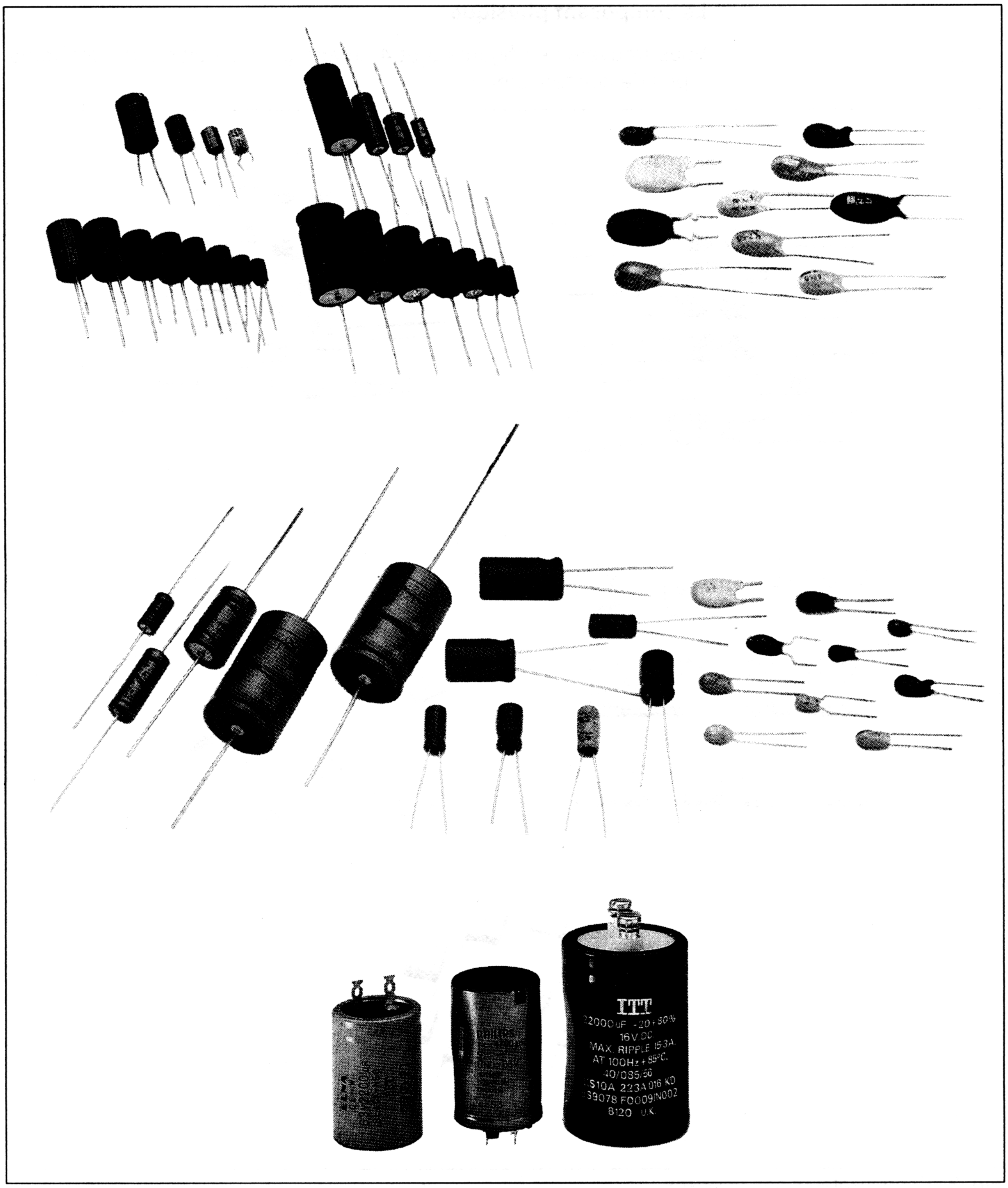


Fig. 4 : Condensateurs polarisés.

Les condensateurs polarisés sont repérés par l'ajout d'un signe + près de la broche concernée, ou d'une déformation du boîtier.

Les différents paramètres nécessaires à la conception

Lors de la conception d'un montage électronique, la valeur du ou des condensateurs à utiliser est certainement la première contrainte qui apparaît, celle-ci résultant de calculs relatifs à un fonctionnement désiré, mais d'autres contraintes, plus technologiques celles-ci, apparaîtront avant d'autoriser le concepteur à se servir dans l'armoire de composants.

Voici donc quelques contraintes dont on devrait théoriquement tenir compte pour le choix d'un condensateur :

– la capacité ;
– la tolérance : en effet, les composants électroniques n'étant pas parfaits, la valeur d'un condensateur varie entre certaines limites données sous forme de tolérance par le constructeur ;
– la tension nominale en courant continu et alternatif ;
– la résistance d'isolement : mesure effectuée en tension continue aux bornes du condensateur ;
– la dérive en capacité : la valeur du condensateur peut se modifier au travers du temps, ou lorsqu'on l'utilise aux limites d'emploi ;
– la durée de vie ;
– le courant de fuite ;
– la fréquence d'utilisation ;
– l'angle de perte.

Nous avons volontairement limité cette liste, d'autres facteurs entrant en jeu, la plupart des paramètres évoqués n'étant déjà même pas pris en compte par les professionnels, sauf par ceux travaillant sur quelques montages de conception pointue.

Le choix d'un condensateur est souvent fait de façon empirique, avec l'habitude et le flair de l'électronicien averti. En fait d'habitude et de flair, le professionnel fait intervenir, sans s'en rendre compte, son expérience et une certaine forme de réflexion qui lui permet de choisir la technologie d'un condensateur selon essentiellement trois facteurs, ceux que nous retiendrons pour notre programme de décision :

– la capacité ;
– la tension d'utilisation ;
– la fréquence de travail.

Les principales technologies existantes

Il existe six types de condensateurs, répondant chacun à des besoins différents, selon leur utilisation dans les montages.

Les condensateurs céramiques

De par leur conception (mélanges complexes de matériaux : magnésie, alumine, zircon, titane, baryum, calcium,...), les condensateurs céramiques sont essentiellement destinés aux applications travaillant avec des fréquences élevées et des grandes tensions.

Leur gamme de valeurs s'étend des plus petites capacités (inférieure au pico-farad) au micro-farad.

Les condensateurs à film plastique

Ces condensateurs existent dans de multiples procédés de fabrication : polystyrène, polyester, polycarbonate, polytétrafluothéthylène,...

De bonne stabilité en températures, ces condensateurs sont utilisés dans les applications à tension et fréquence élevées (de l'ordre du mégahertz (MHz)).

Leurs valeurs sont comprises entre la centaine de nanofarads et le microfarad.

Les condensateurs électrolytiques

On trouve dans cette technologie type diélectrique : l'aluminium et le tantale, associées respectivement à des composés chimiques d'électrolytes : un acide composant un électrolyte liquide ou solide, et un électrolyte gélifié ou solide associé au tantale.

Pour des tensions d'utilisation relativement faibles, ce procédé de fabrication permet de fabriquer des condensateurs avec des valeurs de capacités élevées (quelques milliers de microfarads), fonctionnant avec des signaux de fréquences basses pour les électrolytiques solides (la dizaine de kilohertz, jusqu'à des fréquences moyennement élevées pour les électrolytiques liquides (le mégahertz).

Il est à noter que ce type de condensateur est polarisé, donc qu'il n'admet pas de tensions alternatives à ses bornes, ou d'inversion de polarité (une tension négative entre la borne dénomée + et l'autre borne). Les conséquences du non respect de cette caractéristique, peuvent conduire à l'inflammation du condensateur dans le cas du tantale, et l'explosion, due à un échauffement de l'électrolyte prisonnier, pour les autres types (phénomène redouté des électroniciens, car les taches provoquées sont indélébiles).

Seules quelques valeurs ont pu être réalisées en non polarisées en utilisant du tantale.

Les condensateurs au mica

Ce type de condensateur, d'une excellente tenue en température, n'existe que pour des valeurs faibles (inférieures à quelques centaines de nanofarads), mais permet de travailler avec des fréquences élevées pour des tensions d'utilisation relativement hautes.

Les condensateurs au papier

Utilisables sous des tensions élevées, pour une plage de fréquences élevée (du continu au mégahertz), ces condensateurs se trouvent dans une très grande variété de valeurs : du nanofarad à quelques dizaines de microfarads.

Les condensateurs de type verre

D'un prix relativement élevé, ce type de condensateur se trouve dans une très petite gamme de valeurs (inférieures à la dizaine de nanofarads), pour des tensions d'utilisation de l'ordre de quelques centaines de volts.

Leur principal intérêt est d'être utilisables dans le domaine de la haute fréquence (jusqu'à quelques gigahertz).

Choix d'une technologie et informatique

Vous avez probablement constaté que la somme d'informations conduisant au choix d'un condensateur commence à être relativement élevée, et peut parfois soulever l'incertitude chez l'amateur non secondé par un « vieux baroudeur » de l'électronique.

Nous avons donc réalisé un programme d'aide à la décision s'appuyant sur les trois principaux critères de choix :

– la capacité ;
– la tension d'utilisation ;
– la fréquence de fonctionnement.

Les critères retenus

Nous avons placé en lignes dites de « DATA » les principales valeurs correspondant à ces critères, en fonction de la technologie, sous le format suivant :

– pour les valeurs de capacité :

DATA TECHNOLOGIE,Valeurbasse,Valeurhaute

– pour les valeurs de tensions :

DATA TECHNOLOGIE,Valeurtensionbasse,Valeurtensionhaute

– pour les fréquences :

DATA TECHNOLOGIE,Valeurfréquencebasse,Valeurfréquence-haute

A partir de ces critères, le programme proposera une ou plusieurs technologies y répondant, selon un choix optimal.

Le premier programme proposé comportera, en données, les valeurs optimales d'utilisation. Nous vous proposerons ensuite les différentes données à modifier pour travailler dans une gamme de valeurs plus grande, généralement satisfaisante, si l'on ne se trouve pas trop dans les limites d'utilisation des composants.

L'algorithme général du programme de décision

Nous proposons ainsi au concepteur différents choix permettant d'entrer les valeurs désirées selon les trois critères. Il pourra ensuite demander la proposition du CPC et éventuellement modifier un paramètre.

Voici l'algorithme du programme principal :

```
– DEBUT
    – TANTQUE le choix n'est pas valide
        – Attendre le choix de l'utilisateur
        – SELON CAS
            – Cas « Valeur » :
                – PROCEDURE acquisition de la valeur de la
                  capacité
            – Cas « Tension » :
                – PROCEDURE acquisition de la valeur de la
                  tension
            – Cas « Fréquence » :
                – PROCEDURE acquisition de la valeur de la
                  fréquence
            – Cas « PROPOSITION » :
                – PROCEDURE proposition d'une ou
                  plusieurs technologies
            – Cas « FIN » :
                – Retourner au Basic
        – FINCAS
    – FINTANTQUE
– FIN
```

Pour chacune des procédures d'acquisition, nous effectuons un rappel de la présentation des valeurs en fonction des multiples admis et des préfixes des valeurs.

En valeurs de capacités :

– **pF** = picofarad = 10^{-12} Farad
– **nF**= nanofarad = 10^{-9} Farad
– **uF** = microfarad = 10^{-6} Farad

En valeurs de tensions :

– **kV** = kilovolts = 10^{+3} Volts

En valeurs de fréquences :

– **kHz** = kilohertz = 10^{+3} Hertz
– **MHz** = mégahertz = 10^{+6} Hertz
– **GHz** = gigahertz = 10^{+9} Hertz

La valeur est ensuite acquise, et en retournant au menu, elle est affichée pour mémoire.

Il est possible de ne pas entrer de valeur en appuyant sur la touche **<RETURN>**, ce qui élargira le champ de recherche de technologie (par exemple si l'on n'est pas fixé sur la tension d'utilisation).

La procédure de proposition de technologie passe par une phase de conversion des préfixes (qui sont placés en lignes de données), puis par une phase de comparaison des différents paramètres en fonction des technologies selon l'algorithme général suivant :

```
– PROCEDURE proposition d'une ou plusieurs technologies
– DEBUT
      – Initialiser les variables de type de technologie
      – SI il faut choisir en fonction de la capacité
            – Convertir le préfixe de capacité
            – POUR la technologie ALLANT DE la première A
              la septième
                  – Comparer la valeur basse
                        – SI la valeur désirée est inférieure
                              – ALORS
                                    – Eliminer la technologie
                        – FINSI
                  – Comparer la valeur haute
                        – SI la valeur désirée est supérieure
                              – ALORS
                                    – Eliminer la technologie
                        – FINSI
```

– FINPOUR
– FINSI
– SI il faut choisir en fonction de la tension
– Convertir le préfixe de tension
– POUR la technologie ALLANT DE la première A la septième
– Procéder de la même façon que pour les valeurs de capacité, en comparant
– FINPOUR
– FINSI
– SI il faut choisir en fonction de la fréquence
– Convertir le préfixe de fréquence
– POUR la technologie ALLANT DE la première A la septième
– Procéder de la même façon que pour les valeurs de tension, en comparant
– FINPOUR
– FINSI
– Proposer à l'écran les technologies n'ayant pas été éliminées
– FIN

Le programme de propositions optimales

Nous vous proposons ci-après le programme développé à partir de l'algorithme précédent :

```
10 REM ******************************
20 REM *     PROGRAMME EXPERT       *
30 REM * PERMETTANT DE DETERMINER *
40 REM * LE TYPE DE CONDENSATEUR  *
50 REM *     OPTIMAL A UTILISER     *
60 REM *    DANS UNE APPLICATION    *
70 REM ******************************
80 REM
90 MODE 2
100 LOCATE 15,1
110 PRINT"DETERMINATION DE LA TECHNOLOGI
E D'UN CONDENSATEUR"
120 MOVE 10,360
130 DRAW 550,360
140 DRAW 550,160
150 DRAW 10,160
160 DRAW 10,360
170 REM
180 REM ** AFFICHAGE ECRAN DE CHOIX **
190 REM
200 LOCATE 4,4
210 PRINT "V : SPECIFICATION DE LA VALEU
R DU CONDENSATEUR";
220 PRINT "......";valeur$
230 LOCATE 4,6
240 PRINT "T : SPECIFICATION DE LA TENSI
ON D'UTILISATION";
250 PRINT ".......";tension$
260 LOCATE 4,8
270 PRINT "F : SPECIFICATION DE LA FREQU
ENCE DE TRAVAIL";
280 PRINT "........";frequence$
290 LOCATE 4,10
300 PRINT "P : PROPOSITION D'AMSTRAD-CPC
"
310 LOCATE 4,14
320 PRINT "X : FIN DE TRAVAIL"
330 REM
340 REPONSE$ = ""
350 REPONSE$ = INKEY$
360 IF REPONSE$ = "" THEN 350
370 REM
380 REPONSE$ = UPPER$(REPONSE$)
390 IF REPONSE$ = "V" THEN GOSUB 460
400 IF REPONSE$ = "T" THEN GOSUB 680
410 IF REPONSE$ = "F" THEN GOSUB 900
420 IF REPONSE$ = "P" THEN GOSUB 1120
430 IF REPONSE$ = "X" THEN CLS:STOP
440 GOTO 90
```

```
450 REM
460 REM *** CHOIX DE LA VALEUR ***
470 REM
480 MODE 2
490 LOCATE 15,1
500 PRINT "VALEUR DU CONDENSATEUR"
510 LOCATE 1,5
520 PRINT"Pour les besoins du programme,
 nous vous proposons"
530 PRINT"d'entrer la valeur en fonction
 des multiples des"
540 PRINT"puissances de 10 et des prefix
es couramment utilises"
550 PRINT"Par exemple:  - 10 nF, et non
10000 pF"
560 PRINT"                - 4700 uF, et no
n 4.7 mF"
570 PRINT
580 PRINT"Rappel des prefixes et puissan
ces correspondantes:"
590 PRINT"                - pF = 10 puissa
nce -12 Farad"
600 PRINT"                - nF = 10 puissa
nce -9 Farad"
610 PRINT"                - uF = 10 puissa
nce -6 Farad"
620 LOCATE 1,20
630 PRINT "Valeur du condensateur ? (Exe
mple: 220 nF - n'oubliez pas l'espace)"
640 LOCATE 10,21
650 INPUT VALEUR$
660 RETURN
670 REM
680 REM *** CHOIX DE LA TENSION DE TRAVA
IL ***
690 REM
700 MODE 2
710 LOCATE 15,1
720 PRINT "TENSION D'UTILISATION"
730 LOCATE 1,5
740 PRINT"Pour les besoins du programme,
 nous vous proposons"
750 PRINT"d'entrer la tension en fonctio
n des multiples des"
760 PRINT"puissances de 10 et des prefix
es couramment utilises"
770 PRINT"Par exemple:  - 10 mV, et non
0.01 V"
780 PRINT"                - 2.5 kV, et non
```

```
 2500 V"
790 PRINT
800 PRINT"Rappel des prefixes et puissan
ces correspondantes:"
810 PRINT"                    - mV = 10 puissa
nce -3 Volt"
820 PRINT"                    - V = 10 puissan
ce 0 Volt
830 PRINT"                    - kV = 10 puissa
nce 3 Volts"
840 LOCATE 1,20
850 PRINT "Tension d'utilisation ? (Exem
ple: 250 V - n'oubliez pas l'espace)"
860 LOCATE 10,21
870 INPUT TENSIONS
880 RETURN
890 REM
900 REM *** CHOIX DE LA FREQUENCE DE TRA
VAIL ***
910 REM
920 MODE 2
930 LOCATE 15,1

940 PRINT "FREQUENCE DE TRAVAIL"
950 LOCATE 1,5
960 PRINT"Pour les besoins du programme,
 nous vous proposons"
970 PRINT"d'entrer la valeur en fonction
 des multiples des"
980 PRINT"puissances de 10 et des prefix
es couramment utilises"
990 PRINT"Par exemple:  - 10 kHz, et non
 10000 Hz"
1000 PRINT"                   - 5 GHz, et non
 5000 MHz"
1010 PRINT
1020 PRINT"Rappel des prefixes et puissa
nces correspondantes:"
1030 PRINT"                   - Hz = 10 puiss
ance 0 Hz"
1040 PRINT"                   - kHz = 10 puis
sance 3 Hz"
1050 PRINT"                   - MHz = 10 puis
sance 6 Hz"
1060 PRINT"                   - GHz = 10 puis
sance 9 Hz"
1070 LOCATE 1,20
1080 PRINT "Valeur de la frequence ? (Ex
```

```
emple: 20 kHz - n'oubliez pas l'espace)"
1090 LOCATE 10,21
1100 INPUT frequence$
1110 RETURN
1120 REM
1130 REM ***  RECHERCHE DU OU DES    ***
1140 REM ***  TYPE DE CONDENSATEUR   ***
1150 REM *** REPONDANT A LA DEMANDE ***
1160 REM
1170 RESTORE 2350
1180 FOR I = 1 TO 7
1190 TYPE (I) = 1
1200 READ TYPE$(I)
1210 READ A$,A$
1220 NEXT I
1230 RESTORE
1240 IF VALEUR$ = "" THEN GOTO 1460
1250 RESTORE 2750: REM CORRESPONDANCE EN
 VALEUR
1260 VALEUR = 0
1270 VALEUR1$ = UPPER$(RIGHT$(VALEUR$,2)
)
1280 FOR I = 1 TO 3
1290      READ PREFIXE$,PUISSANCE$
1300      PUISSANCE$ = UPPER$(PUISSANCE$)
1310      PREFIXE$ = UPPER$(PREFIXE$)
1320      IF PREFIXE$ = VALEUR1$ THEN VAL
EUR2$=PUISSANCE$
1330 NEXT I
1340 VALEUR3$ = LEFT$(VALEUR$,LEN(VALEUR
$)-2)
1350 VALEUR4$ = VALEUR3$ + VALEUR2$
1360 REM
1370 REM *** RECHERCHE EN FONCTION DE LA
 VALEUR DU CONDENSATEUR ***
1380 REM
1390 RESTORE 2350
1400 FOR I = 1 TO 7
1410      READ TYPE$,LEPLUSBAS,LEPLUSHAUT
1420      IF VAL(VALEUR4$) < LEPLUSBAS TH
EN TYPE(I) = 0
1430      IF VAL(VALEUR4$) > LEPLUSHAUT T
HEN TYPE(I) = 0
1440      TYPE$(I) = TYPE$
1450 NEXT I
1460 RESTORE
1470 IF TENSION$ = "" THEN GOTO 1690
1480 RESTORE 2800: REM CORRESPONDANCE EN
```

```
 TENSION
1490 TENSION = 0
1500 TENSIO1$ = UPPER$(RIGHT$(TENSION$,2
))
1510 FOR I = 1 TO 2
1520      READ PREFIXE$,PUISSANCE$
1530      PUISSANCE$ = UPPER$(PUISSANCE$)
1540      PREFIXE$ = UPPER$(PREFIXE$)
1550      IF PREFIXE$ = TENSIO1$ THEN TEN
SIO2$=PUISSANCE$
1560 NEXT I
1570 TENSIO3$ = LEFT$(TENSION$,LEN(TENSI
ON$)-2)
1580 TENSIO4$ = TENSIO3$ + TENSIO2$
1590 REM
1600 REM *** RECHERCHE EN FONCTION DE LA
 TENSION D'UTILISATION ***
1610 REM
1620 RESTORE 2480
1630 FOR I = 1 TO 7
1640      READ TYPE$,LEPLUSBAS,LEPLUSHAUT
1650      IF VAL(TENSIO4$) < LEPLUSBAS TH
EN TYPE(I) = 0
1660      IF VAL(TENSIO4$) > LEPLUSHAUT T
HEN TYPE(I) = 0
1670      TYPE$(I) = TYPE$
1680 NEXT I
1690 RESTORE
1700 IF FREQUENCE$ = "" THEN GOTO 1950
1710 RESTORE 2840: REM CORRESPONDANCE EN
 FREQUENCE
1720 FREQUENCE = 0
1730 FREQUE1$ = UPPER$(RIGHT$(FREQUENCE$
,3))
1740 FOR I = 1 TO 4
1750      READ PREFIXE$,PUISSANCE$
1760      PUISSANCE$ = UPPER$(PUISSANCE$)
1770      PREFIXE$ = UPPER$(PREFIXE$)
1780      IF PREFIXE$ = FREQUE1$ THEN FRE
QUE2$=PUISSANCE$
1790 NEXT I
1800 FREQUE3$ = LEFT$(FREQUENCE$,LEN(FRE
QUENCE$)-3)
1810 FREQUE4$ = FREQUE3$ + FREQUE2$
1820 REM
```

```
1830 REM *** RECHERCHE EN FONCTION DE LA
 FREQUENCE D'UTILISATION ***
1840 REM
1850 RESTORE 2610
1860 FOR I = 1 TO 7
1870      READ TYPES$,LEPLUSBAS,LEPLUSHAUT
1880      IF VAL(FREQUE4$) < LEPLUSBAS TH
EN TYPE(I) = 0
1890      IF VAL(FREQUE4$) > LEPLUSHAUT T
HEN TYPE(I) = 0
1900      TYPES$(I) = TYPES$
1910 NEXT I
1920 REM
1930 REM *** AFFICHAGE DES REPONSES ***
1940 REM
1950 MODE 2
1960 LOCATE 4,4
1970 PRINT "VALEUR DU CONDENSATEUR";
1980 PRINT "......";valeur$
1990 LOCATE 4,6
2000 PRINT "TENSION D'UTILISATION";
2010 PRINT ".......";tension$
2020 LOCATE 4,8
2030 PRINT "FREQUENCE DE TRAVAIL";
2040 PRINT "........";frequence$
2050 LOCATE 4,15
2060 PRINT "VOICI MA PROPOSITION:"
2070 LOCATE 1,19
2080 PRINT "TECHNOLOGIES POSSIBLES:"
2090 MOVE 225,160:DRAW 225,50
2100 FOR I = 1 TO 7
2110   IF TYPE(I) <>1 THEN GOTO 2140
2120      LOCATE 30,15+I
2130      PRINT TYPES$(I)
2140 NEXT
2150 FLAG = 0
2160 FOR I = 1 TO 7
2170    IF TYPE(I) = 1 THEN FLAG = 1
2180 NEXT I
2190 IF FLAG <> 0 THEN GOTO 2240
2200    LOCATE 15,17
2210    PRINT "Aucun condensateur ne cor
respond"
2220    LOCATE 15,18
2230    PRINT "a ces specifications"
2240 LOCATE 4,24
2250 PRINT "APPUYER SUR UNE TOUCHE POUR
MODIFIER UN OU PLUSIEURS PARAMETRES"
```

```
2260 CALL &BB06
2270 GOTO 90
2280 REM
2290 REM * FIN DE PROGRAMME PRINCIPAL *
2300 REM ******************************
2310 REM
2320 REM *** DONNEES CONCERNANT ***
2330 REM ***    LES VALEURS      ***
2340 REM
2350 DATA CERAMIQUE,0.56E-12,300E-9
2360 DATA PLASTIQUE.100E-9.1E-6
2370 DATA ELECTROLITIQUE SOLIDE,1E-6,1
2380 DATA ELECTROLITIQUE LIQUIDE,1E-6,1
2390 DATA PAPIER,1E-9,47E-6
2400 DATA MICA,2E-12,300E-9
2410 DATA VERRE,1E-12,10E-9
2420 REM
2430 REM **************************
2440 REM
2450 REM *** DONNEES CONCERNANT ***
2460 REM ***    LES TENSIONS     ***
2470 REM
2480 DATA CERAMIQUE,30,10000
2490 DATA PLASTIQUE,50,2000
2500 DATA ELECTROLITIQUE SOLIDE,2,63
2510 DATA ELECTROLITIQUE LIQUIDE,2,450
2520 DATA PAPIER,160,10000
2530 DATA MICA,50,5000
2540 DATA VERRE,300,500
2550 REM
2560 REM **************************
2570 REM
2580 REM *** DONNEES CONCERNANT ***
2590 REM ***    LES FREQUENCES   ***
2600 REM
2610 DATA CERAMIQUE,20000,5E9
2620 DATA PLASTIQUE,1000,1E6
2630 DATA ELECTROLITIQUE SOLIDE,0,1E6
2640 DATA ELECTROLITIQUE LIQUIDE,0,10000
2650 DATA PAPIER,0,1E6
2660 DATA MICA,100E3,1E9
2670 DATA VERRE,30E6,5E9
2680 REM
2690 REM **************************
2700 REM
2710 REM *** CORRESPONDANCES ENTRE ***
2720 REM *** LES PUISSANCES DE 10   ***
```

```
2730 REM
2740 REM *** EN VALEURS POUR LES CAPACIT
ES A CALCULER ***
2750 DATA PF,E-12
2760 DATA NF,E-9
2770 DATA UF,E-6
2780 REM
2790 REM *** EN VALEURS POUR LES TENSION
 D'UTILISATION ***
2800 DATA " V",E0
2810 DATA KV,E3
2820 REM
2830 REM *** EN VALEURS POUR LES FREQUEN
CES DE FONCTIONNEMENT ***
2840 DATA " Hz",E0
2850 DATA KHz,E3
2860 DATA MHz,E6
2870 DATA GHz,E9
2880 REM
2890 REM ******************************
2900 END
```

Lignes 90 à 320 : Affichage du menu.

Lignes 340 à 360 : Acquisition du choix.

Lignes 380 à 440 : Direction vers la procédure de choix.

Lignes 460 à 660 : Acquisition de la valeur de capacité.

Lignes 680 à 880 : Acquisition de la valeur de tension de travail.

Lignes 900 à 1110 : Acquisition de la valeur de la fréquence de fonctionnement.

Lignes 1170 à 1230 : Initialisation des variables concernant la technologie : on y affecte un drapeau égal à un, signalant que pour l'instant, toutes les technologies sont possibles.

Ligne 1240 : Vérification d'un choix sur la valeur de capacité.

Lignes 1250 à 1350 : Transformation de la valeur donnée sous la forme : Valeur + préfixe + Unité, en une valeur entièrement numérique.

Lignes 1370 à 1460 : Recherche des valeurs encadrant la valeur choisie, en fonction de la technologie. S'il faut éliminer la technologie, le drapeau la concernant est affecté de la valeur 0.

Lignes 1470 à 1700 : Même fonctionnement que pour la sélection de capacité (lignes 1240 à 1460), mais elles concernent le choix en tension.

Lignes 1710 à 1910 : Même fonctionnement que pour la sélection de tension (lignes 1240 à 1460), mais elles concernent le choix en fréquence.

Lignes 1930 à 2260 : Affichage des technologies répondant aux critères d'utilisation fournis.

Ligne 2270 retour au menu, sans perte des précédentes valeurs pour modification éventuelle.

Lignes 2320 à 2410 : Correspondances entre technologies et valeurs optimales de capacités.

Lignes 2450 à 2540 : Correspondances entre technologies et valeurs optimales de tensions.

Lignes 2580 à 2670 : Correspondances entre technologies et valeurs optimales de fréquences.

Lignes 2750 à 2770 : Correspondances entre préfixe + Unité et puissances de 10 pour les valeurs de capacité.

Lignes 2790 à 2810 : Correspondances entre préfixe + Unité et puissances de 10 pour les valeurs de tension.

Lignes 2830 à 2870 : Correspondances entre préfixe + Unité et puissances de 10 pour les valeurs de fréquence.

Modifications pour valeurs limites

Le programme précédent effectue un choix rigoureux sur la technologie, et propose une solution optimale.

Après utilisation, il s'avère que les propositions restent très limitées, ce qui ne satisfaira certainement pas l'amateur averti. En effet, pour certains critères, le programme ne proposera, par exemple, qu'un condensateur plastique, alors qu'un condensateur de type céramique pourrait convenir, en n'oubliant pas qu'il risque de travailler dans des conditions, non plus optimales, mais limites, ce qui, quelquefois, influence sa valeur, ou sa durée de vie.

C'est pour ces raisons que nous vous proposons de modifier le programme en remplaçant les lignes de données situées entre 2320 et 2690 par les lignes suivantes :

```
2320 REM *** DONNEES CONCERNANT ***
2330 REM ***    LES VALEURS     ***
2340 REM
2350 DATA CERAMIQUE,0.56E-12,4.7E-6
2360 DATA PLASTIQUE,1E-9,33E-6
2370 DATA ELECTROLITIQUE SOLIDE,820E-9,1
2380 DATA ELECTROLITIQUE LIQUIDE,820E-9,
1
2390 DATA PAPIER,1E-9,47E-6
2400 DATA MICA,2E-12,300E-9
2410 DATA VERRE,1E-12,10E-9
2420 REM
2430 REM **************************
2440 REM
2450 REM *** DONNEES CONCERNANT ***
2460 REM ***    LES TENSIONS    ***
2470 REM
2480 DATA CERAMIQUE,0,10000
2490 DATA PLASTIQUE,0,25000
2500 DATA ELECTROLITIQUE SOLIDE,0,63
2510 DATA ELECTROLITIQUE LIQUIDE,0,450
2520 DATA PAPIER,0,10000
2530 DATA MICA,0,5000
2540 DATA VERRE,0,500
2550 REM
2560 REM **************************
2570 REM
2580 REM *** DONNEES CONCERNANT ***
2590 REM ***   LES FREQUENCES   ***
2600 REM
2610 DATA CERAMIQUE,50,5E9
2620 DATA PLASTIQUE,50,1E6
2630 DATA ELECTROLITIQUE SOLIDE,0,1E6
2640 DATA ELECTROLITIQUE LIQUIDE,0,20000
2650 DATA PAPIER,0,1E6
2660 DATA MICA,10E3,1E9
2670 DATA VERRE,30E6,5E9
2680 REM
2690 REM **************************
```

La technologie électronique étant en perpétuelle évolution, il pourra apparaître des encadrements supérieurs que vous pourrez modifier dans ces lignes.

Vous avez donc entre les mains un programme qui permettra aux passionnés d'électronique de répondre à certaines de leus questions sur la technologie capacitive, et aux autres d'avoir un programme de référence à modifier, pour effectuer d'autres programmes d'aide à la décision.

IV. Fonctionnement du condensateur en régime continu

Afin de poursuivre l'étude de la structure interne de vos Amstrad CPC, nous aurons besoin de nouvelles connaissances théoriques concernant le condensateur, aussi, nous avons décidé, dans ces notions de base, d'étudier la charge et la décharge du condensateur en régime continu.

Le fonctionnement du condensateur en régime continu, c'est-à-dire cablé dans un circuit comportant une tension continue, est l'un des fonctionnements du condensateur le plus rencontré, notamment lorsqu'il est utilisé dans les montages à base de logique.

En effet, sur un instant donné, les niveaux logiques sont fixés, et nous sommes toujours en présence d'une tension stable, donc continue, sur cet instant.

En régime continu, le condensateur se comporte de trois façons différentes : il peut se charger, se décharger, ou rester dans l'état où il se trouve. Ce dernier fonctionnement, inutile dans l'absolu, est toujours la conséquence de l'un des deux fonctionnements précédents (sinon, votre condensateur n'est pas connecté au circuit).

Notre étude se décomposera ici en trois parties :

– Une étude théorique (et mathématique) du fonctionnement dans les deux cas ci-dessus présentés.
– La présentation d'une méthode de calcul permettant d'effectuer une recherche sur ce type de fonctionnement sans connaissances mathématiques.
– Un programme de calcul et de tracé des caractéristiques dans les deux fonctionnements.

ETUDE THÉORIQUE

Convention de signe et règle de base

En électronique, le condensateur est considéré comme étant un dipôle (dipôle = deux pôles = deux broches) passif (passif = récepteur d'énergie électrique).

La convention s'appliquant sur les dipôles passifs, nous dit que pour un sens du courant choisi, la tension aux bornes du composant est représentée dans le sens opposé, comme le montre la figure 1.

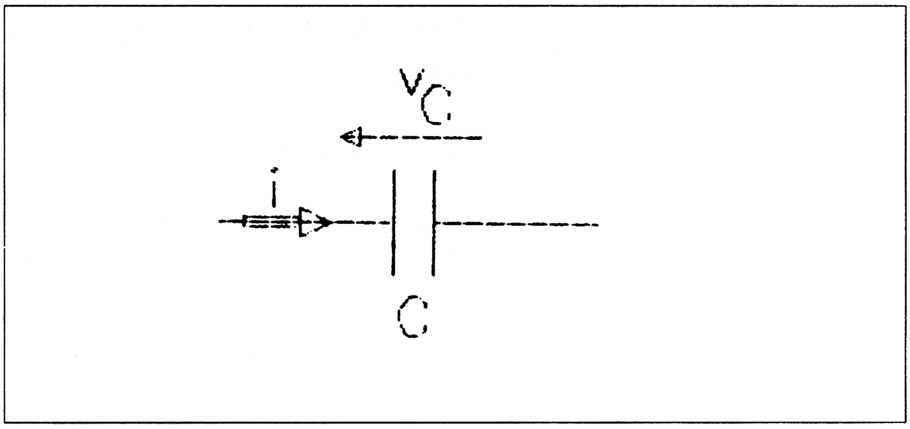


Fig. 1 : Convention de sens des courant et tension.

Le condensateur possédant une capacité de valeur C, il est possible de décrire une relation entre le courant et la tension, relation qui dépend du facteur temps :

$$i = C \times \frac{dV_c}{dt}$$

Cette relation peut aussi s'écrire, pour décrire la tension :

$$dV_c = \frac{1}{C} \times i \times dt$$

Explications :
- Le terme dV_c désigne une variation de tension aux bornes du condensateur.
- Le terme dt désigne une variation de temps.
- Ainsi, la variation de tension aux bornes du condensateur est proportionnelle au courant le traversant, et dépend de la variation de temps.

La charge du condensateur

Même s'il est possible de le réaliser, il n'est pas question d'étudier théoriquement la charge du condensateur que l'on brancherait aux bornes d'une source de tension. Premièrement, l'étude se résumerait à dire que la tension aux bornes du condensateur est égale à celle de l'alimentation. Deuxièmement, votre alimentation, si elle n'est pas protégée, n'apprécierait pas ce genre de manipulation répétée. Troisièmement, le condensateur n'apprécierait pas non plus.

La charge que nous allons étudier est celle représentée en figure 2.

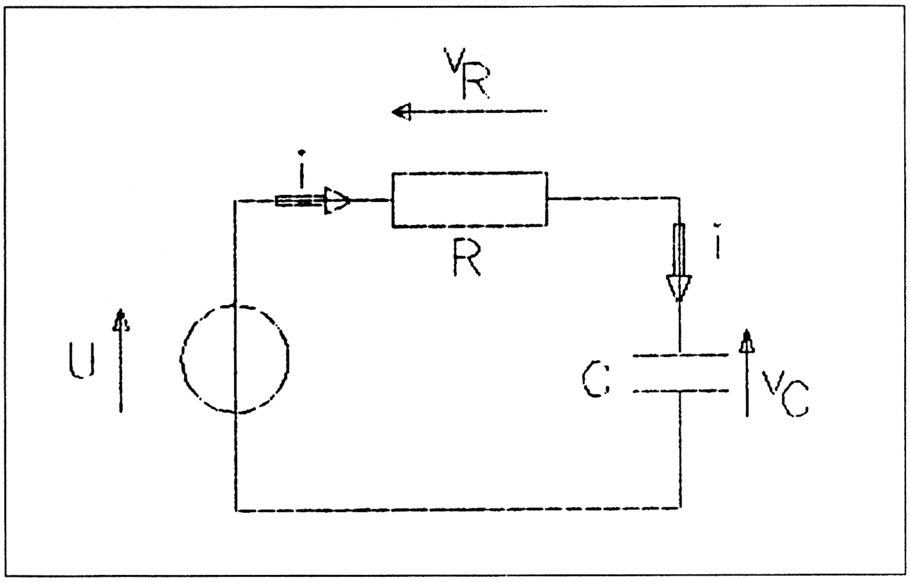


Fig. 2 : Circuit de charge d'un condensateur.

Dans pratiquement tous les cas et quelle que soit la complexité du schéma, il sera toujours possible, à un instant donné, de le simplifier pour le résumer à ce que l'on appelle un schéma équivalent qui aura la forme présentée.

Dans ce schéma, nous avons dénommé U la tension du circuit de charge.

Le condensateur se chargera, à partir d'une valeur initiale qui ne sera pas forcément nulle (il est possible de continuer à charger un condensateur qui aurait précédemment été en partie chargé), au travers un élément résistif dénommé R. Nous appellerons cette charge initiale : U_{Init}.

En se fixant un sens du courant i positif (dans le même sens que la tension de la source), nous pouvons dessiner les tensions aux bornes des deux dipôles passif R (V_R) et C (V_c).

A partir du schéma précédent, nous pouvons écrire une relation entre les différentes tensions, issue de ce que l'on appelle la relation de Chasles :

$$V_c = U - V_R$$

V_R étant la tension aux bornes de l'élément résitif, elle s'écrit sous la forme :

$$V_r = R \times i$$

En la remplaçant dans l'équation précédente, on obtient :

$$V_c = U - R \times i$$

Le courant i, circulant dans la résistance, étant le même que celui circulant dans tout le circuit, notamment dans le condensateur, on peut écrire :

$$i = C \times \frac{dV_c}{dt}$$

En remplaçant dans l'équation précédente, nous avons :

$$V_c = U - R \times C \, \frac{dV_c}{dt}$$

Ce qui peut aussi s'écrire :

$$V_c + R \times C \times \frac{dV_c}{dt} = U$$

Cette dernière équation est ce que l'on appelle une équation différentielle de premier ordre, dans laquelle V_c est le terme inconnu, et elle s'étudie en deux phases :

– On étudie d'abord l'équation sans second membre (c'est-à-dire sans le terme U), pour obtenir ce que l'on appelle une solution générale.
– On recherche ensuite une solution particulière que l'on ajoutera à la solution générale précédente pour obtenir la solution.
– On remplace l'étude par la définition d'éventuelles constantes introduites au fur et à mesure.

• *Etude de l'équation différentielle sans second membre :*

$$V_c + R \times C \times \frac{dV_c}{dt} = 0$$

$$==> V_c = - R \times C \times \frac{dV_c}{dt}$$

$$==> V_c \, dt = - R \times C \times dV_c$$

$$==> - \frac{1}{R \times C} \, dt = \frac{1}{V_c} \, dV_c$$

Ayant de part et d'autre l'expression de deux différentielles, il est possible d'intégrer chacune des expressions :

$$\int -\frac{1}{R \times C}\, dt = \int \frac{1}{V_c}\, dV_c$$

Le symbole $\int$ désigne en mathématiques ce que l'on appelle une intégrale.

L'intégrale d'un terme de la forme **a * dt** (a étant constant) est égale à : **a * t + constante 1**

En considérant que **a = - 1 / (RC)**, nous avons :

$$\int -\frac{1}{R \times C}\, dt = -\frac{1}{R \times C}\, t + \text{constante } 1$$

L'intégrale d'un terme de la forme **(1 / u) x dU** est égale à :
Ln (|u|) + constante 2.

Le terme Ln désigne la fonction logarithme népérien, touche présente sur toutes les calculatrices dites scientifiques, mais aussi sur votre Amstrad, par l'instruction **LOG** (voir Partie 4 Chapitre 1.2. page 75).

Le terme |u| désigne la valeur absolue (fonction **ABS** de l'Amstrad).

En remplaçant u par l'expression V_c, on obtient :

$$\int \frac{1}{V_c}\, dV_c = \text{Ln}\,(|V_c|) + \text{constante } 2$$

En reprenant ces deux égalités que l'on remplace dans l'équation, on peut écrire la nouvelle équation :

$$-\frac{1}{R \times C} \times t + \text{constante } 1 = \text{Ln}\,(|V_c|) + \text{constante } 2$$

Que l'on peut écrire aussi sous la forme :

$$\text{Ln}\,(|V_c|) = -\frac{1}{R \times C} \times t \times (\text{constante } 1 - \text{constante } 2)$$

Pour « récupérer » le terme en v_c qui est le terme qui nous intéresse, nous allons passer par la fonction exponentielle, qui est la fonction réciproque du logarithme népérien et pour laquelle nous allons rappeler deux formules qui vont nous être utiles :

$$e^{\text{Ln}\,(x)} = x$$

$$e^{(a+b)} = e^a \times e^b = e^b \times e^a$$

Sur votre Amstrad CPC, cette fonction se traduit par l'instruction **EXP** (voir Partie 4 Chapitre 1.2. page 75). Vous pouvez ainsi essayer de vérifier ces formules, en frappant en mode direct :

PRINT EXP (LOG (3))

qui doit vous donner 3 et

PRINT EXP (8) ; "=" ; EXP(5) * EXP (3)

qui vous donne approximativement la même valeur.

Ainsi, à partir de l'équation précédente, on peut écrire, en supprimant la valeur absolue, car une exponentielle est toujours positive :

$$V_c = e^{\left(-\frac{1}{R \times C} \times t + (\text{constante } 1 - \text{constante } 2)\right)}$$

qui s'écrit aussi :

$$V_c = e^{(\text{constante } 1 - \text{constante } 2)} \times e^{-\frac{1}{R \times C} \times t}$$

La soustraction d'une constante à une autre nous donne une constante. De même, l'exponentielle d'une constante est une constante, d'où :

$$V_c = \text{constante} \times e^{-\frac{1}{R \times C} \times t}$$

qui est la solution générale de l'équation différentielle sans second membre.

• *Recherche d'une solution particulière*

La solution finale de l'équation s'écrira sous la forme :

$$V_c = \text{constante} \times e^{-\frac{1}{R \times C} \times t} + \text{solution particulière}$$

Il nous faut maintenant déterminer la solution particulière. Nous allons pour cela supposer que le temps tend vers l'infini.

Dans ce cas le terme $e^{-\frac{1}{R \times C} \times t}$ tend vers la valeur zéro, ce qui nous donne :

$$V_c(t \to \infty) = \text{solution particulière}$$

Or, lorsque le temps tend vers l'infini, la valeur de la tension v_c, aux bornes du condensateur tend à égaler la tension U, d'où :

Solution particulière = U

La solution de l'équation différentielle devient :

$$V_c = \text{constante} \times e^{-\frac{1}{R \times C} t} + U$$

• *Détermination de la constante*

Il nous reste à déterminer la valeur du terme constante, et nous allons pour cela nous intéresser à la valeur de la tension V_c à l'instant initial t = 0. Dans ce cas, le terme en exponentiel est égal à 1 (frapper la commande **EXP (0)** pour vous en assurer), et la solution devient :

$$V_c\ (t = 0) = \text{constante} + U$$

Comme à l'instant initial, la valeur de la tension aux bornes du condensateur a été déterminée comme étant égale à U_{init} (voir début de l'étude), on a :

$$U_{init} = \text{constante} + U$$

Ce qui donne pour valeur de la constante :

$$\text{Constante} = U_{init} - U$$

Ainsi la solution finale, déterminant la tension aux bornes du condensateur, est :

$$\boxed{V_c = (U_{init} - U) \times e^{-\frac{1}{R \times C} \times t} + U}$$

La décharge du condensateur

Pas question ici de décharger directement le condensateur en court-circuitant ses bornes, il n'appréciera pas forcément longtemps.

Le circuit équivalent, permettant la décharge du condensateur, pourra généralement se résumer un élément résistif aux bornes du condensateur, comme représenté en figure 3.

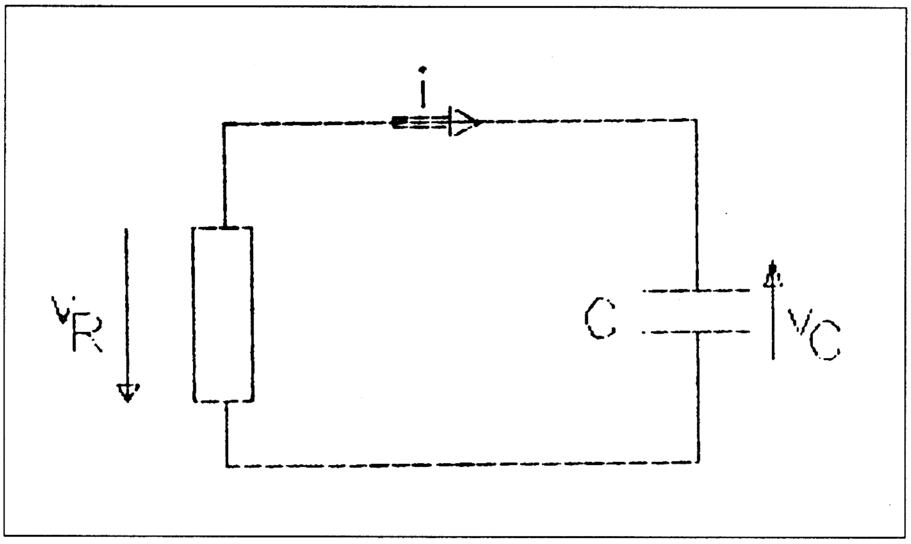


Fig. 3 : Circuit de décharge d'un condensateur.

Une fois encore, le condensateur est initialement considéré comme étant chargé à une valeur U_{init}.

A partir de ce circuit, on peut écrire :

$$V_c = - V_R$$

En utilisant les raisonnements précédents, on obtiendra la succession d'équations suivantes :

$$V_c = - R \times i$$

$$V_c = - R \times C \times \frac{dV_c}{dt}$$

$$V_c + R \times C \times \frac{dV_c}{dt}$$

Nous obtenons ainsi une nouvelle équation différentielle, qui ressemble comme deux gouttes d'eau à celle de l'équation générale sans second membre déjà étudiée :

$$V_c = \text{constante} \times e^{-\frac{1}{R \times C} \times t}$$

La constante sera déterminée en connaissant la valeur de la tension aux bornes du condensateur à l'instant initial, à t = 0 :

$$V_c\ (t = 0) = U_{init} = \text{constante}$$

D'où la solution finale déterminant l'évolution de la tension aux bornes du condensateur :

$$\boxed{V_c = U_{init} \times e^{-\frac{1}{R \times C} \times t}}$$

LES COURBES UNIVERSELLES DE CHARGE ET DE DÉCHARGE

A partir des deux études précédemment menées, et en appliquant les formules trouvées, il est possible, à l'aide d'une calculatrice scientifique ou mieux de votre Amstrad, d'effectuer tous les calculs concernant la charge et la décharge du condensateur.

Il existe aussi une autre façon d'effectuer ces calculs, avec bien sûr moins de précision ; en utilisant ce que l'on appelle les courbes universelles de charge et de décharge.

Ces courbes dérivent des formules précédentes et permettent d'effectuer tous les calculs, quelles que soient les valeurs de R, C, U, ou du temps, et ce, par quiconque ne maîtrise pas les calculs sur les fonctions logarithme et exponentiel.

La courbe universelle de charge

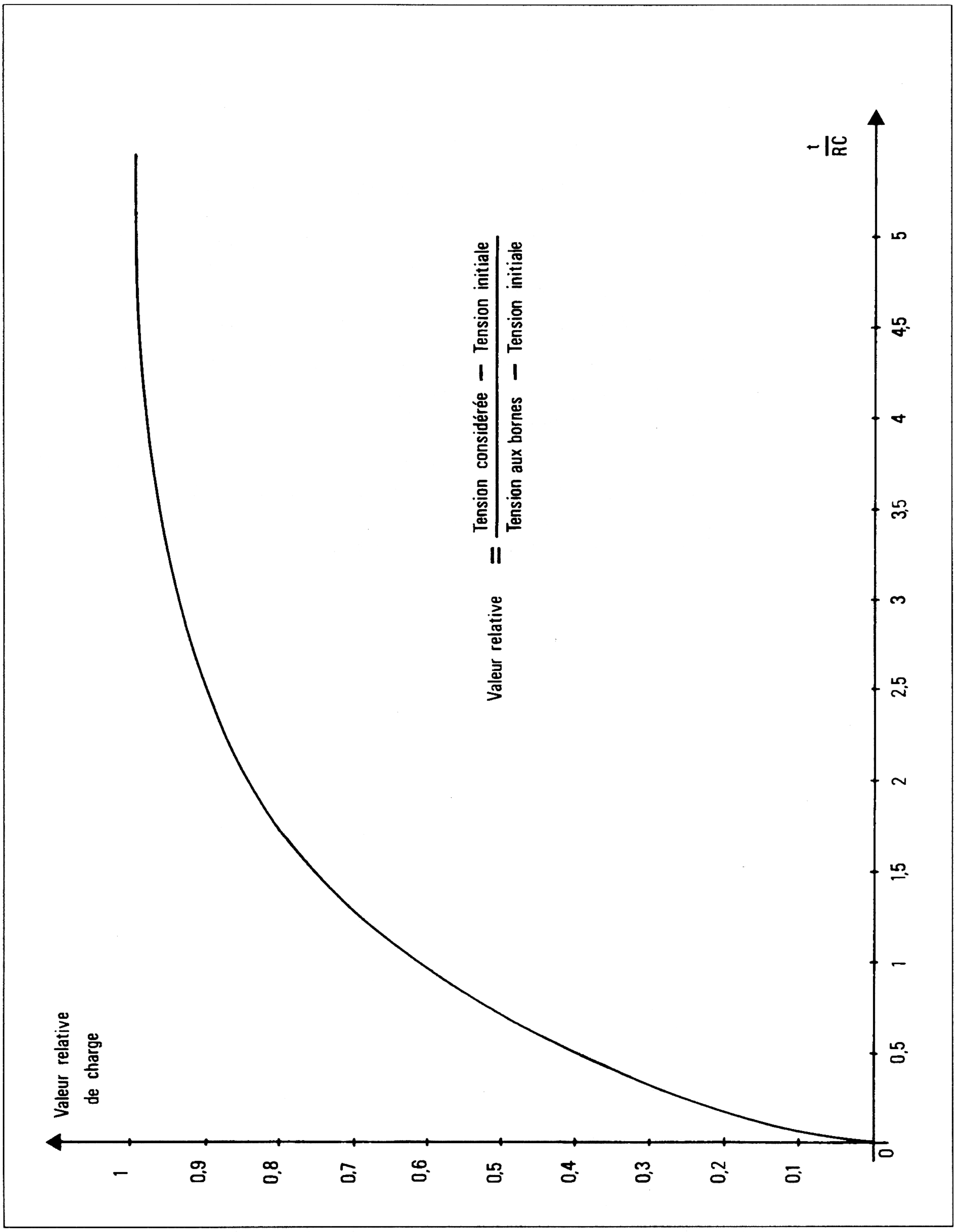


Fig. 4 : Abaque de charge d'un condensateur.

Cette courbe représentée précisément à tout à fait une allure exponentielle.

Les valeurs données sur les axes sont données en valeurs relatives, ce qui permet de la rendre universelle.

L'axe horizontal comporte le terme t/RC qui est celui de l'exponentielle. L'échelle sur cet axe s'arrête à la valeur 5, car on considère qu'au bout d'un temps égal à 5 fois la constante, dite constante de temps, R x C, le condensateur est entièrement chargé.

En axe vertical, nous trouverons des valeurs relatives calculées à partir des tensions mises en œuvre : la tension aux bornes du circuit de charge, la tension initiale et la tension considérée (celle pour laquelle on désire effectuer le calcul).

Plusieurs types de calculs peuvent être effectués sur cette courbe :

• *Recherche de temps*

Il peut être intéressant, pour une valeur considérée, de rechercher le temps nécessaire pour l'atteindre.

Vous devrez alors calculer la valeur relative, que vous porterez sur l'axe vertical.

En vous reportant à la courbe, vous pourrez déterminer sur l'axe horizontal la valeur t / (R x C).

Pour obtenir le temps de charge, il suffit de multiplier la valeur trouvée par le terme R x C.

• *Recherche d'un paramètre R ou C*

Cette recherche s'effectue lorsque l'on désire trouver la valeur de l'un des composants pour obtenir un temps de charge fixé à l'avance, pour une valeur considérée connue.

On procède alors de la même façon que précédemment pour lire la valeur t / (R x C) ; puis, pour déterminer la valeur de l'un des composants, connaissant l'autre, on appliquera l'une des deux formules suivantes :

$$R = t / (\text{valeur} \times C)$$

ou

$$C = t / (\text{valeur} \times R)$$

• *Recherche de la tension atteinte*

Cette recherche s'effectue lorsque l'on désire connaître la valeur d'une tension au bout d'un certain temps connu.

On commence par calculer la valeur t / (R x C), que l'on porte sur l'axe horizontal.

En se reportant sur la courbe, on relèvera sur l'axe vertical la valeur relative de charge.

De la formule donnée, on en tirera :

Tension considérée = valeur relative x (tension aux bornes - tension initiale) + tension initiale

La courbe universelle de décharge

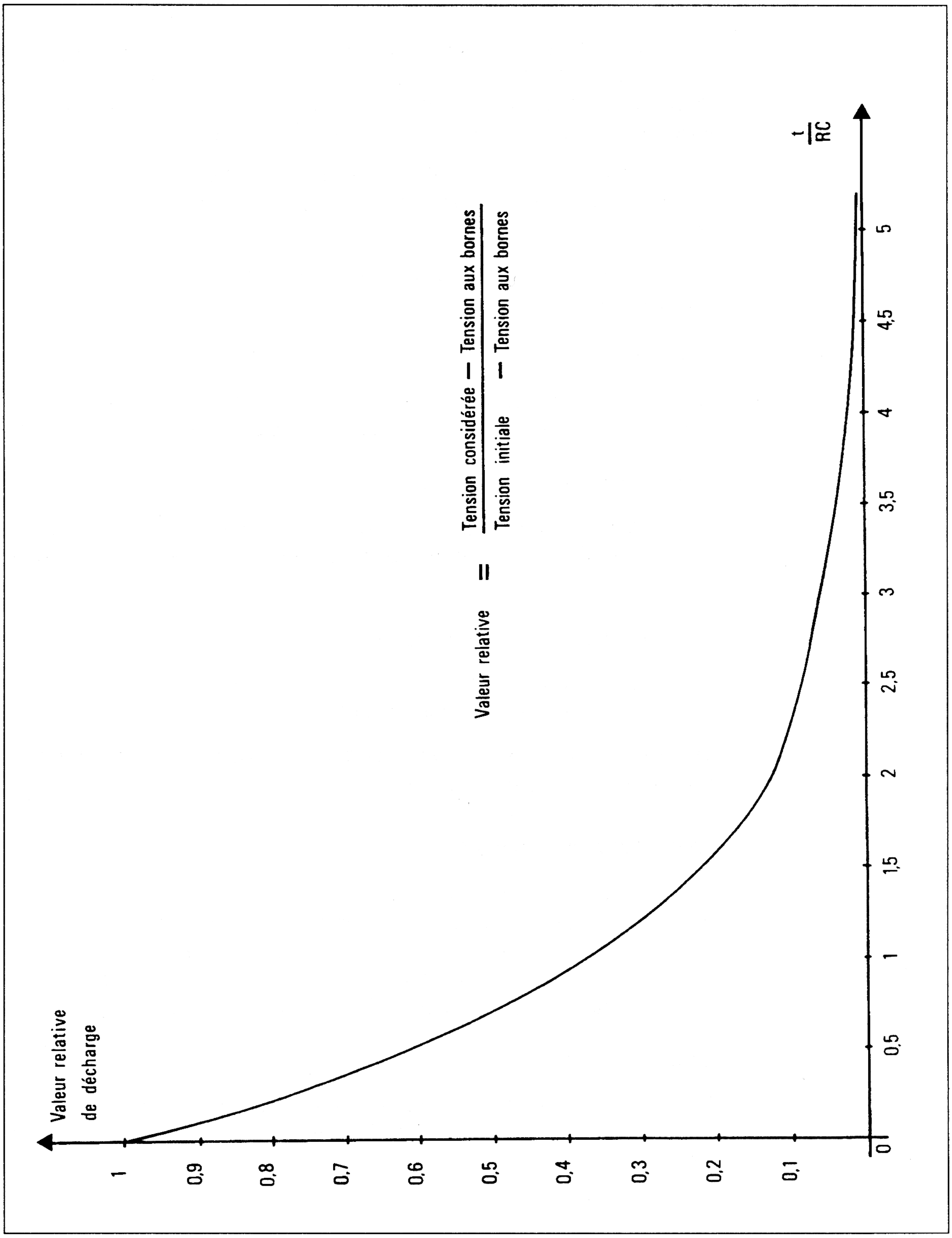


Fig. 5 : Abaque de décharge d'un condensateur.

La courbe représentée en figure 5 concerne la décharge du condensateur.

Cette courbe est applicable pour toute valeur de tension et de composant. Elle est de plus utilisable lorsque le condensateur ne se décharge pas complètement. C'est-à-dire s'il reste une certaine valeur de tension résiduelle aux bornes du circuit R - C.

Dans le cas où le condensateur a tendance à se décharger complètement, il suffit de remplacer la valeur de la tension aux bornes par zéro.

Nous pouvons sur cette courbe effectuer des calculs identiques aux précédents :

• *Recherche de temps*

On procédera de façon identique à la charge, en appliquant cette fois-ci la nouvelle formule déterminant la valeur relative de décharge.

• *Recherche d'un paramètre R ou C*

Toujours de la même façon, et avec la nouvelle formule, on pourra déterminer R et C en appliquant les formules déterminées précédemment.

• *Recherche de la tension atteinte*

La façon de procéder est identique à celle de la charge, mais cette fois-ci, la formule à appliquer devient :

Tension considérée = valeur relative x (tension initiale - tension aux bornes) + tension aux bornes

APPLICATION INFORMATIQUE

Suite aux deux présentations précédentes, nous vous proposons un programme, dérivé de celui de tracé des courbes universelles, mais utilisant les formulations démontrées par l'étude théorique, pour obtenir des résultats plus précis, afin de tracer les courbes telles quelles seraient si on décidait de les mesurer sur le circuit.

Etude du programme

Nous avons voulu notre programme applicable à toute valeur de l'élément résistif, ou condensateur, de la tension initiale et de la tension de charge.

Celui-ci vous demandera donc les différentes valeurs précédemment citées.

Le programme recherchera de lui-même si l'on est en présence d'un circuit de charge ou de décharge, ce qui évitera de procéder par un choix du type de circuit.

Aussi, afin de prendre le plus de place sur l'écran, et ainsi augmenter la précision dans le cas de petites valeurs, le programme effectuera une recherche sur un facteur de proportionnalité, permettant d'occuper le maximum de place pour le tracé de la courbe.

Enfin, nous avons introduit la possibilité d'effectuer une copie graphique sur imprimante. Rappelons qu'il n'est pas possible de vous donner simplement un programme de copie graphique pour tout type d'imprimantes. Aussi avons-nous arrêté notre choix aux imprimantes de type DMP 2000, ou compatibles EPSON (en particulier, la CITIZEN 120D qui accepte ce programme de copie).

Si votre imprimante est différente, et que vous possédez un sous-programme de copie graphique la pilotant, il vous sera possible de remplacer le notre par celui-ci.

Le listing

Nous vous fournissons ci-après le listing commenté de ce programme.

Vous ferez particulièrement attention aux noms des variables utilisées, noms représentatifs de ce qu'elles contiendront, ainsi que des données hexadécimales en fin de programme.

```
10 REM ******************************
20 REM *  TRACE DES CHRONOGRAMMES   *
30 REM *  DE CHARGE ET DE DECHARGE *
40 REM *  D'UN CONDENSATEUR DANS    *
50 REM *  UN SCHEME DE TYPE R - C   *
60 REM ******************************
70 REM
80 MODE 2
90 REM
100 REM *** PRESENTATION ***
110 REM
120 LOCATE 16.5
130 PRINT"CALCULS SUR LE CIRCUIT R - C"
140 PLOT 100.300
150 DRAWR 270.0
160 DRAWR 0.50
170 DRAWR -270.0
180 DRAWR 0.-50
190 REM
200 REM *** ACOUISITION DES ***
210 REM ***     PARAMETRES    ***
220 REM
230 FOR i = 1 TO 3
240      PRINT
250 NEXT i
260 PRINT" - Valeur de l'element resisti
f (Ohms)":
270 INPUT R
280 PRINT
290 PRINT" - Valeur de l'element capacit
if (Farads)":
300 INPUT C
310 PRINT " - Valeur de la tension initi
ale"
320 PRINT "       aux bornes du condensat
eur (Volts)":
330 INPUT Uinitial
340 PRINT " - Valeur de la tension total
e"
350 PRINT "      aux bornes du circuit R-
C (Volts)":
360 INPUT Ufinal
370 CLS
380 REM
390 REM *** COMPARAISON POUR CALCUL ***
400 REM
410 IF Ufinal > Uinitial THEN GOTO 530
420 IF Ufinal < Uinitial THEN GOTO 1000
```

```
430 REM
440 REM *** PAS D'EFFET SUR ***
450 REM *** LE CONDENSATEUR ***
460 REM
470 PRINT
480 PRINT "Le condensateur reste dans so
n etat initial"
490 STOP
500 REM
510 REM *** CHARGE DU CONDENSATEUR ***
520 REM
530 teta = R * C
540 fincharge = 5 * teta
550 proportionx = 540 / fincharge
560 proportiony = 300 / (Ufinal - Uiniti
al)
570 REM
580 REM *** ORIGINE DU TRACE ***
590 PLOT 100.100
600 increment = fincharge / 540
610 REM
620 REM *** TRACE DE LA COURBE ***
630 REM ***       DE CHARGE      ***
640 REM
650 FOR temps = 0 TO fincharge STEP incr
ement
660     U = Ufinal + (Uinitial - Ufinal)
 * EXP( - temps / teta )
670     deplacement = U - Uinitial :REM
conversion d'echelle
680     abscisse = proportionx * temps +
 100
690     ordonnee = proportiony * deplace
ment + 100
700     DRAW abscisse.ordonnee
710 NEXT temps
720 REM
730 REM **     POSITIONNEMENT DES     **
740 REM ** VALEURS CARACTERISTIQUES **
750 REM **    AUX MULTIPLES DE LA     **
760 REM **    CONSTANTE DE TEMPS      **
770 REM
780 FOR temps = fincharge/5 TO fincharge
 STEP fincharge/5
790     U = Ufinal + (Uinitial - Ufinal)
 * EXP( - temps / teta )
800     deplacement = U - Uinitial
810     abscisse = proportionx * temps +
```

```
 100
 820       ordonnee = proportiony * deplace
ment + 100
 830       MOVE abscisse,ordonnee - 5
 840       TAG
 850       PRINT ROUND (U,2);
 860       TAGOFF
 870  NEXT temps
 880  REM
 890  REM *** AFFICHAGE DES AXES ***
 900  REM
 910  GOSUB 1460
 920  CALL &BB06
 930  END
 940  REM
 950  REM ****************************
 960  REM
 970  REM *** COURBE DE DECHARGE ***
 980  REM ***   DU CONDENSATEUR   ***
 990  REM
1000 teta = R * C
1010 fincharge = 5 * teta
1020 proportionx = 540 / fincharge
1030 proportiony = 300 / (Uinitial - Ufi
nal)
1040 REM ORIGINE DU TRACE
1050 PLOT 100,400
1060 increment = fincharge / 540
1070 REM
1080 REM *** TRACE DE LA COURBE ***
1090 REM ***    DE DECHARGE      ***
1100 REM
1110 FOR temps = 0 TO fincharge STEP inc
rement
1120      U = Ufinal + (Uinitial - Ufinal
) * EXP( - temps / teta )
1130      deplacement = U - Ufinal
1140      abscisse = proportionx * temps
+ 100
1150      ordonnee = proportiony * deplac
ement + 100
1160      DRAW abscisse,ordonnee
1170 NEXT temps
1180 REM
1190 REM **     POSITIONNEMENT DES     **
1200 REM ** VALEURS CARACTERISTIQUES **
1210 REM **    AUX MULTIPLES DE LA     **
1220 REM **    CONSTANTE DE TEMPS      **
```

```
1230 REM
1240 FOR temps = fincharge/5 TO fincharg
e STEP fincharge/5
1250       U = Ufinal + (Uinitial - Ufinal
) * EXP( - temps / teta )
1260       deplacement = U - Ufinal
1270       abscisse = proportionx * temps
+ 100
1280       ordonnee = proportiony * deplac
ement + 100
1290       MOVE abscisse,ordonnee + 15
1300       TAG
1310       PRINT ROUND (U,2);
1320       TAGOFF
1330 NEXT temps
1340 REM
1350 REM *** AFFICHAGE DES AXES ***
1360 REM
1370 GOSUB 1460
1380 CALL &BB06
1390 END
1400 REM
1410 REM *****************************
1420 REM
1430 REM *** TRACE DES AXES ***
1440 REM
1450 REM AXE HORIZONTAL
1460 PLOT 100,100
1470 DRAW 100,400
1480 REM AXE VERTICAL
1490 PLOT 100,100
1500 DRAW 640,100
1510 PLOT 100,100
1520 REM
1530 REM *** TRACE DES GRADUATION ***
1540 REM
1550 REM GRADUATIONS DES TEMPS
1560 FOR temps = 0 TO 5 * teta STEP teta
 / 2
1570       MOVE 100 + temps * proportionx,
100
1580       DRAWR 0,-10
1590 NEXT temps
1600 REM
1610 REM GRADUATIONS DES TENSIONS
1620 FOR tension = 0 TO ABS(Ufinal - Uin
itial) STEP ABS(Ufinal - Uinitial)/10
1630       MOVE 100,tension * proportiony
```

```
+ 100
1640       DRAWR -90,0
1650 NEXT tension
1660 REM
1670 REM AFFICHAGE DES VALEURS
1680 REM
1690 REM AFFICHAGE DES TEMPS
1700 FOR temps = 0 TO 5 * teta STEP teta
1710       MOVE 90 + temps * proportionx.9
0
1720       TAG
1730       PRINT temps:
1740       TAGOFF
1750 NEXT temps
1760 REM
1770 REM AFFICHAGE DES TENSIONS
1780 FOR tension = 0 TO ABS(Ufinal - Uin
itial) STEP ABS(Ufinal - Uinitial)/10
1790       MOVE 0.tension * proportiony +
105
1800       TAG
1810       PRINT MIN(Uinitial,Ufinal) + te
nsion:
1820       TAGOFF
1830 NEXT tension
1840 REM
1850 REM *** RAPPEL DES PARAMETRES ***
1860 REM
1870 LOCATE 10.22
1880 PRINT "Tension initiale: ":Uinitial
:"V":
1890 PRINT "  -  ":
1900 PRINT "Tension finale: ":Ufinal:"V"
1910 LOCATE 10.23
1920 PRINT "Valeur de l'element resistif
:  ":R:"Ohms"
1930 LOCATE 10.24
1940 PRINT "Valeur de l'element capaciti
f: ":C:"Farads"
1950 LOCATE 5.25
1960 INPUT "Desirez vous une copie sur i
mprimante (O/N)":reponse$
1970 LOCATE 5.25
1980 FOR i = 1 TO 60
1990       PRINT CHR$(32);
2000 NEXT i
2010 IF reponse$ = "O" OR reponse$ = "o"
 THEN GOSUB 2070
```

```
2020 RETURN
2030 REM
2040 REM *** COPIE GRAPHIQUE ***
2050 REM ***   DE LA COURBE   ***
2060 REM
2070 RESTORE 2230
2080 ADRESSE = &9FFF
2090 SOMME = 0
2100 I = 0
2110 A$=""
2120 WHILE A$ <> "XX"
2130     I = I + 1
2140     READ A$
2150     IF A$ = "XX" THEN GOTO 2190
2160     OCTET = VAL("&H"+A$)
2170     SOMME = SOMME + OCTET
2180     POKE ADRESSE + I,OCTET
2190 WEND
2200 IF SOMME <> 20557 THEN PRINT " ERRE
UR DANS LES DATA": LIST 2230-
2210 CALL &A000
2220 RETURN
2230 DATA 21,A8,A0,CD,87,A0,CD,0B
2240 DATA BC,57,1E,00,19,22,D5,A0
2250 DATA 1E,1D,3E,07,32,C4,A0,D5
2260 DATA 06,08,7B,FE,01,20,0B,3E
2270 DATA 04,32,C4,A0,11,CD,A0,06
2280 DATA 04,21,11,C7,A0,2A,D5,A0
2290 DATA EB,73,23,72,23,EB,CD,26
2300 DATA BC,10,F5,21,B0,A0,CD,87
2310 DATA A0,21,7F,02,22,C5,A0,01
2320 DATA 50,08,C5,3A,C4,A0,47,97
2330 DATA 21,D4,A0,56,2B,5E,2B,EB
2340 DATA CB,06,1F,EB,10,F5,1F,CD
2350 DATA 93,A0,C1,10,E5,21,C7,A0
2360 DATA 06,07,5E,23,56,2B,EB,CD
2370 DATA 20,BC,EB,73,23,72,23,10
2380 DATA F1,06,08,0D,20,CC,D1,1D
2390 DATA 20,95,21,BC,A0,18,00,7E
2400 DATA FE,00,C8,23,E5,CD,93,A0
2410 DATA E1,18,F4,2A,C5,A0,2B,22
2420 DATA C5,A0,4F,7C,B5,C8,79,CD
2430 DATA 2E,BD,38,FB,CD,2B,BD,C9
2440 DATA 1B,31,0D,00,CD,0A,A0,18
2450 DATA 0D,0A,1B,2A,01,7F,02,00
2460 DATA 00,3E,7A,BB,1B,40,0D,00
2470 DATA 00,1B,78,04,07,7F,02,XX
```

Analyse du programme

Nous vous donnons ci-dessous l'explication des principales actions exécutées dans les lignes du programme.

Lignes 80 à 180 :	Présentation du programme.
Lignes 260 à 270 :	Acquisition de la valeur de l'élément résistif.
Lignes 290 à 300 :	Acquisition de la valeur du condensateur (sa capacité).
Lignes 310 à 330 :	Acquisition de la valeur initiale aux bornes du condensateur.
Lignes 340 à 360 :	Acquisition de la valeur totale aux bornes du circuit R - C.
Lignes 410 à 420 :	Orientation des calculs selon le type de circuit. Si Ufinal est supérieure à Uinitial, le condensateur se charge (envoi en ligne 530). Si Ufinal est inférieure à Uinitial, le condensateur se décharge (envoi en ligne 1000).
Ligne 480 :	Au cas ou Uinitial = Ufinal, cette ligne est exécutée pour signaler que le condensateur ne peut ni se charger ni se décharger.
Ligne 530 :	Calcul de la constante de temps R x C.
Lignes 550 et 560 :	Calcul des facteurs de proportionnalité pour les tracés.
Ligne 600 :	Valeur d'un incrément pour effectuer les calculs.
Lignes 650 à 710 :	Calculs des valeurs pour chaque point de la courbe et liaisons de chacun des points ensemble par la fonction DRAW.
Lignes 780 à 860 :	Calcul et affichage de points caractéristiques de la courbe (pour 1 x R x C, 2 x R x C, 3 x R x C, 4 x R x C). On remarquera l'utilisation de la commande TAG pour pouvoir afficher ces valeurs hors des limites imparties aux lignes de l'écran.
Ligne 910 :	Envoi à un sous-programme d'affichage des axes et de proposition de copie graphique.
Lignes 920 et 930 :	Attente de la frappe d'une touche pour rendre la main.

Lignes 1000 à 1390 : Cette partie du programme concerne la décharge du condensateur, et est géré de façon similaire à la charge, aux variables près. Les commentaires vous permettront d'effectuer l'analogie avec les explications précédentes.

Lignes 1450 à 1650 : Tracé commun des axes et des graduations des courbes.

Lignes 1700 à 1830 : Calcul et affichage des valeurs caractéristiques pouvant apparaître sur les axes. L'instruction TAG est encore utilisée.

Lignes 1870 à 1940 : Rappel des paramètres pour éventuellement les inscrire sur la copie graphique.

Lignes 1950 à 1960 : Proposition de la copie graphique.

Lignes 1970 à 2000 : Effacement de la proposition pour qu'elle n'apparaisse pas sur l'éventuelle copie graphique.

Ligne 2010 : Gestion de la réponse.

Lignes 2070 à 2470 : Copie graphique avec acquisition des valeurs héxadécimales.

Utilisation

Après lancement, le programme vous propose aussitôt d'entrer les paramètres :

– **la valeur de l'élément résistif :** cette valeur est à donner en ohms. Vous pouvez utiliser les puissances de 10 correspondantes, ainsi 10 kΩ pourront être entrés indifféremment 10000 ou 10 E3.

Rappel : – 1 kΩ (kilo-ohms) = 1 x 10^3 = 1 E3
– 1 MΩ (Méga-ohms) = 1 x 10^6 = 1 E6

– **la valeur du condensateur** est à préciser en Farads (unités de référence). Comme les valeurs généralement utilisées sont bien inférieures, vous entrerez cette valeur à l'aide de puissances de 10. 470 µF s'écrira donc 470 E-6.

Rappel : – 1 pF (pico-Farads) = 1 x 10_{-12} = 1 E-12
– 1 nF (nano-Farads) = 1 x 10_{-9} = 1 E-9
– 1 µF (micro-Farads) = 1 x 10_{-6} = 1 E-6

– **La valeur de la tension initiale :** vous entrerez cette valeur en Volts, que vous pourrez, selon le cas, présenter avec les puissances de 10 nécessaires.

– **La valeur de la tension totale :** cette valeur possède les mêmes conditions d'entrée que la précédente.

Le programme se charge alors de représenter la courbe correspondante aux valeurs indiquées, puis vous propose une copie graphique.

Si vous y répondez positivement, sachez que une fois lancé, le programme de copie graphique doit être terminé, ce qui implique que si vous avez oublié de connecter votre imprimante, vous ne pourrez sortir de cette situation qu'en effectuant une réinitialisation de votre Amstrad (<SHIFT> <CTRL> < ESC>).

Afin de vérifier la bonne frappe du programme, nous vous proposons des recopies d'écran avec différentes valeurs pour les deux circuits possibles.

En figure 6, vous trouverez les paramètres à entrer pour représenter la courbe de charge de la figure 7.

En figure 8, vous trouverez les paramètres à entrer pour représenter la courbe de décharge de la figure 9.

```
CALCULS SUR LE CIRCUIT R - C

- Valeur de l'element resistif (Ohms)? 12E3

- Valeur de l'element capacitif (Farads)? 10E-9

- Valeur de la tension initiale
    aux bornes du condensateur (Volts)? 1

- Valeur de la tension totale
    aux bornes du circuit R-C (Volts)? 12
```

Fig. 6

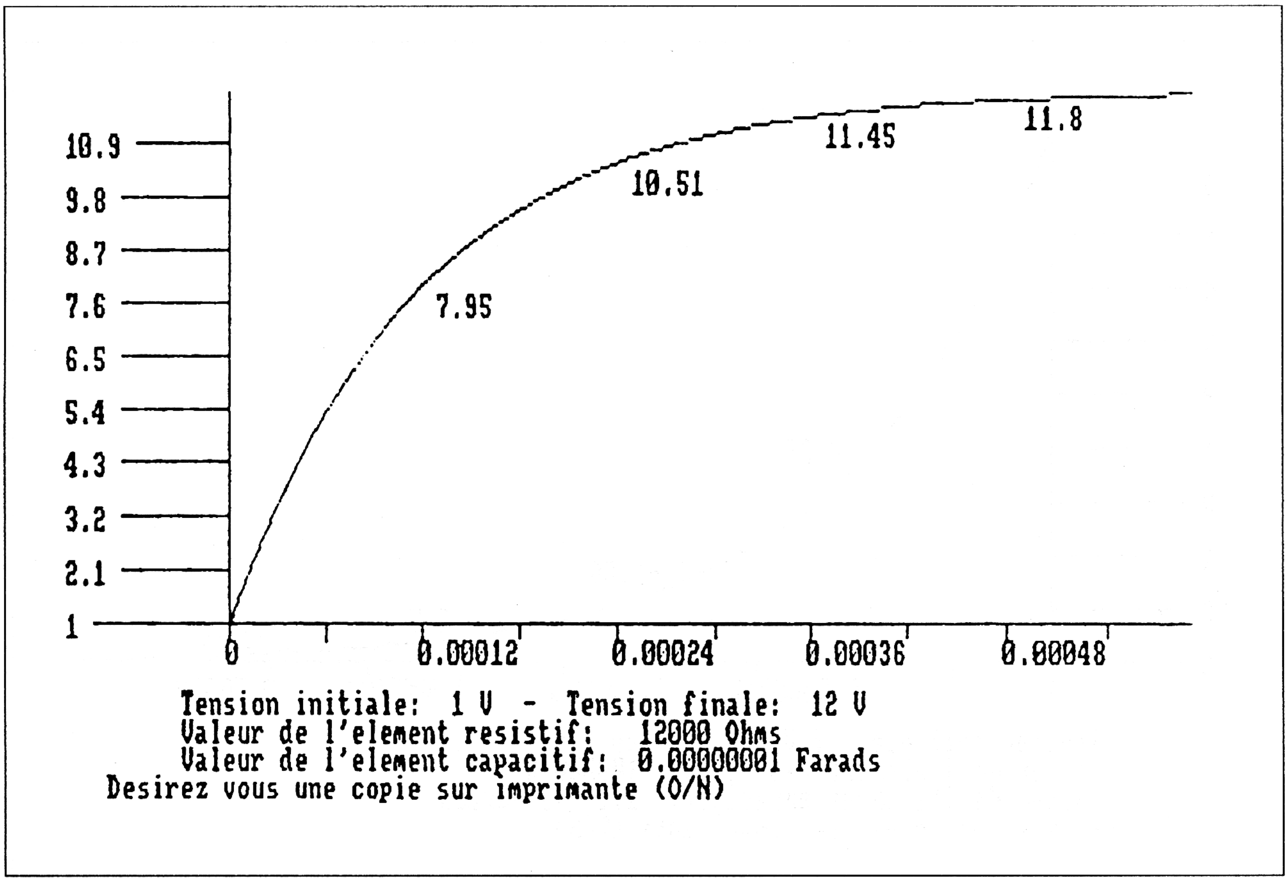
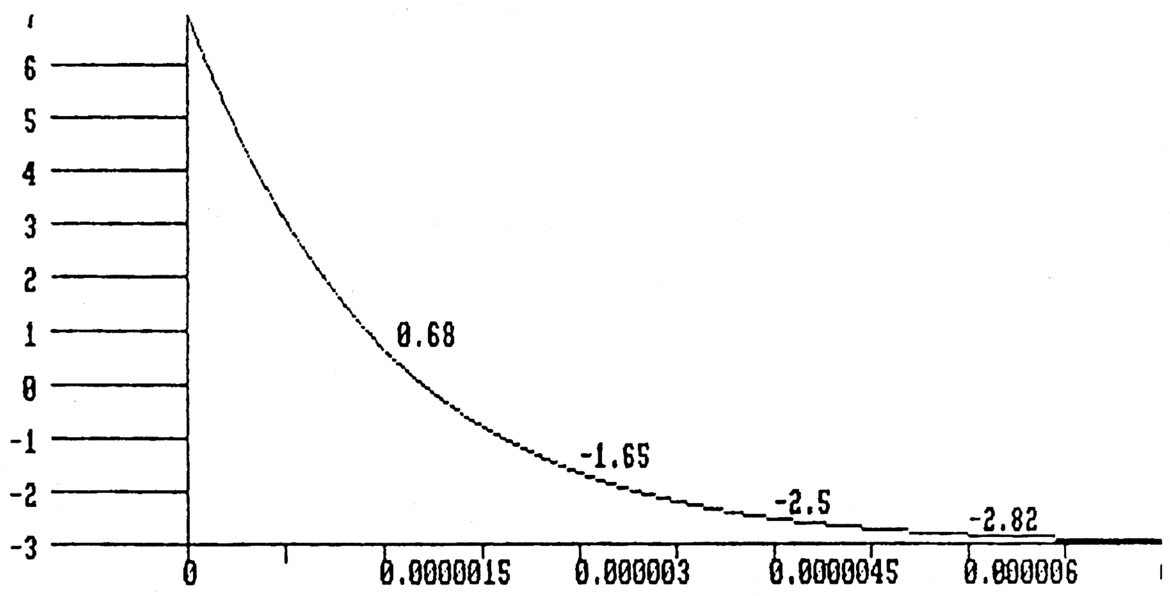


Fig. 7

CALCULS SUR LE CIRCUIT R - C

- Valeur de l'element resistif (Ohms)? 100E3
- Valeur de l'element capacitif (Farads)? 15E-12
- Valeur de la tension initiale
  aux bornes du condensateur (Volts)? 7
- Valeur de la tension totale
  aux bornes du circuit R-C (Volts)? -3

Fig. 8



Tension initiale: 7 V - Tension finale: -3 V
Valeur de l'element resistif: 100000 Ohms
Valeur de l'element capacitif: 1.5E-11 Farads
Desirez vous une copie sur imprimante (O/N)

Fig. 9

13/1.2

Electronique logique

I. Notions fondamentales

A. DÉFINITIONS ET CONVENTIONS

Variables binaires

Pour faciliter l'assimilation des concepts inhérents à l'électronique logique, nous allons manipuler des variables binaires (ou booléennes) qui représenteront une propriété ou un événement. De telles variables peuvent prendre deux valeurs distinctes complémentaires : 0 et 1.

Types de logique

La logique binaire se décompose en :

— la logique combinatoire ;

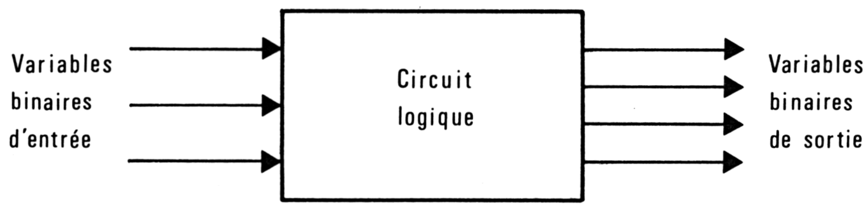
— la logique séquentielle.

Pour illustrer la différence entre ces deux types de logique, considérons un circuit logique quelconque matérialisé par une boîte noire.

Sur cette boîte noire :

— faisons arriver plusieurs connexions correspondant aux variables binaires d'entrée ;

— faisons sortir plusieurs connexions correspondant aux variables binaires de sortie.



Un circuit numérique fera de la logique combinatoire si les variables de sortie dépendent uniquement des variables d'entrée. Par contre, il fera de la logique séquentielle si les variables de sortie dépendent des variables d'entrée mais aussi des variables de sortie précédentes.

Convention

Dans la suite, nous adopterons la convention suivante : la négation logique (ou complément) d'une variable logique x sera notée $\overline{x}$.

B. FONCTIONS BINAIRES

a) Négation logique (ou complément) : Fonction NON (NOT en anglais)

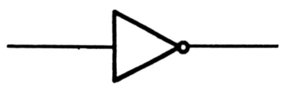
Pour schématiser le fonctionnement des fonctions logiques, nous utiliserons des tables de vérité. Ces tables se présentent sous la forme de tableaux à une ou plusieurs entrées et à une sortie.

La table de vérité de la fonction NON est la suivante :

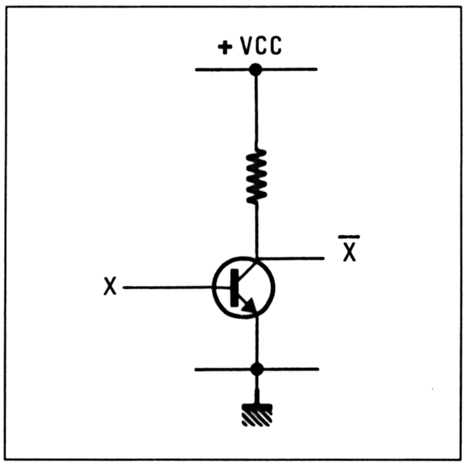
x	$\overline{x}$
0	1
1	0

Cette table indique que :
un 0 logique présenté en entrée provoque une sortie à 1,
un 1 logique présenté en entrée provoque une sortie à 0.

Le sigle employé pour représenter cette fonction logique est le suivant :



La fonction NON peut être reproduite avec des composants discrets selon le schéma suivant :



A titre d'exemple, les circuits intégrés suivants regroupent des opérateurs NON :

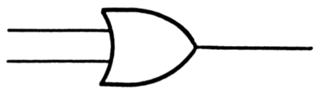
TTL : 7404 C-MOS : 4009

b) Somme logique : Fonction OU (OR en anglais)

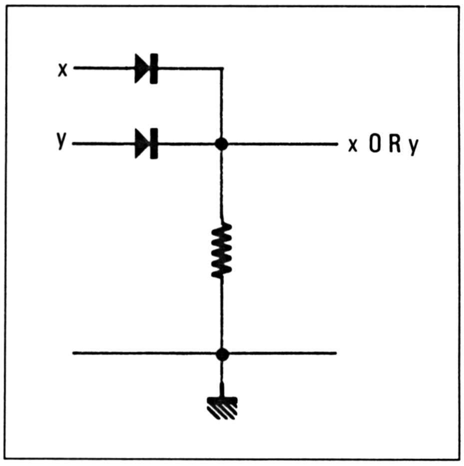
Au moins deux entrées sont nécessaires pour faire fonctionner un opérateur logique OU. La table de vérité de la fonction OU est la suivante :
(voir page suivante)

x	y	x OR y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Le sigle employé pour représenter cette fonction logique est le suivant :



La fonction OU peut être reproduite avec des composants discrets selon le schéma suivant :



A titre d'exemple, les circuits intégrés suivants regroupent des opérateurs OR:

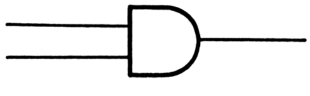
TTL : 7432 C-MOS : 4071

c) Produit logique : Fonction ET (AND en anglais)

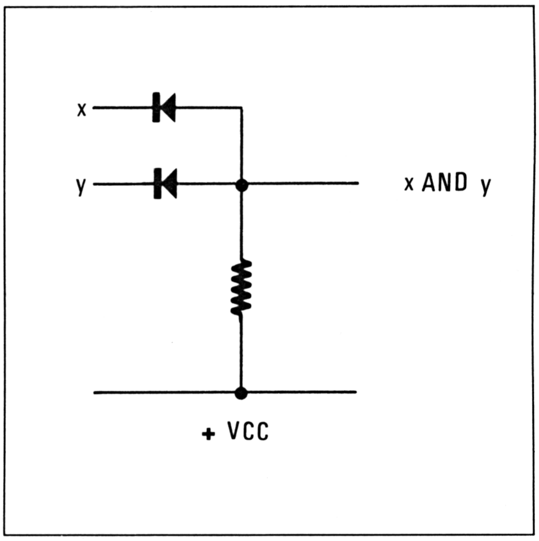
Au moins deux entrées sont nécessaires pour faire fonctionner un opérateur logique ET. La table de vérité de la fonction ET est la suivante :

x	y	x AND y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Le sigle employé pour représenter cette fonction logique est le suivant :



La fonction ET peut être reproduite avec des composants discrets selon le schéma suivant :



A titre d'exemple, les circuits intégrés suivants regroupent des opérateurs AND :

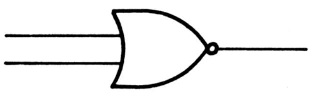
TTL : 7408 C-MOS : 4073

d) Somme logique inversée : Fonction NON-OU (NOR en anglais)

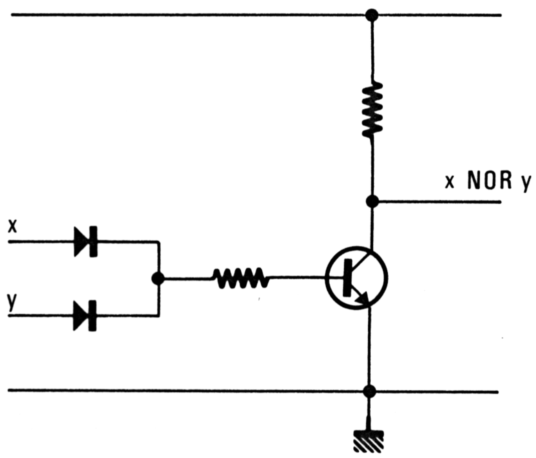
Au moins deux entrées sont nécessaires pour faire fonctionner un opérateur logique OU. La table de vérité de la fonction OU est la suivante :

x	y	x NOR y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Le sigle employé pour représenter cette fonction logique est le suivant :



La fonction NOR peut être reproduite avec des composants discrets selon le schéma suivant :



A titre d'exemple, les circuits intégrés suivants regroupent des opérateurs NOR :

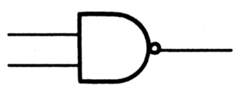
TTL : 7402 C-MOS : 4000

e) Produit logique inversé : Fonction NON-ET (NAND en anglais)

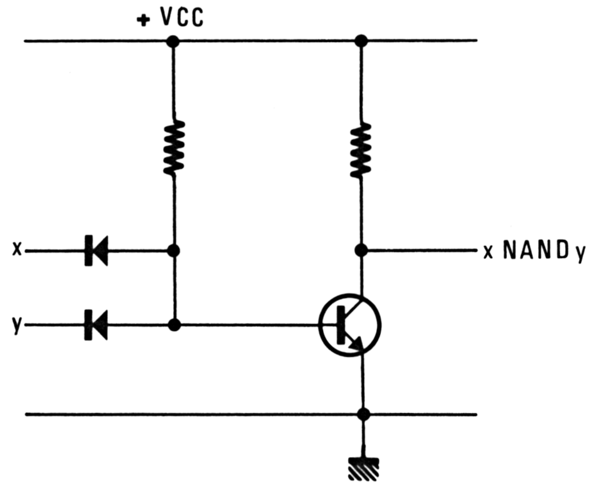
Au moins deux entrées sont nécessaires pour faire fonctionner un opérateur logique NAND. La table de vérité de la fonction NAND est la suivante :

x	y	x NAND y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Le sigle employé pour représenter cette fonction logique est le suivant :



La fonction NAND peut être reproduite avec des composants discrets selon le schéma suivant :



A titre d'exemple, les circuits intégrés suivants regroupent des opérateurs NAND :

TTL : 7400 C-MOS : 4011

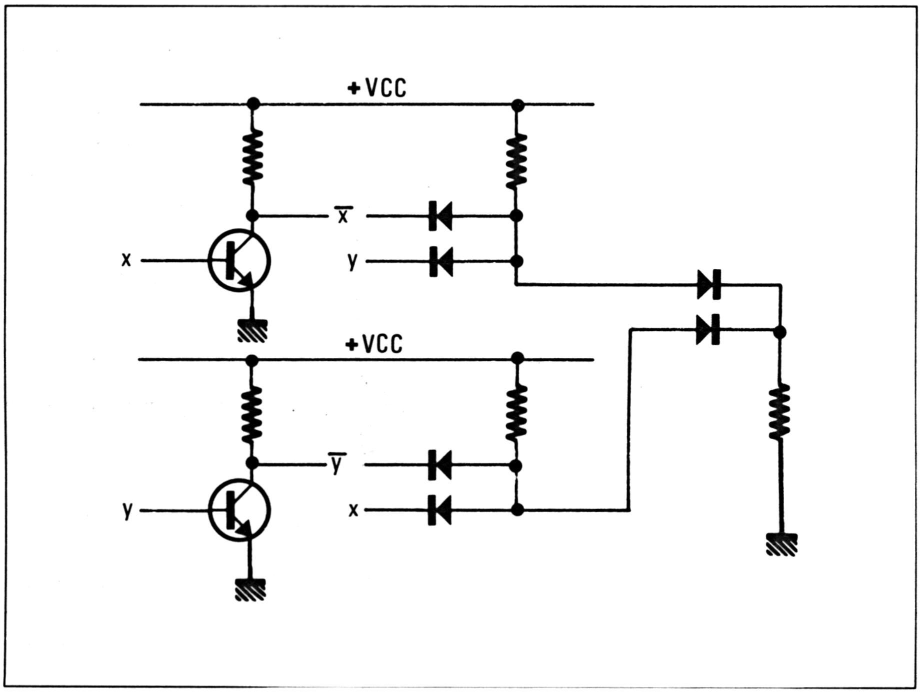
f) OU exclusif : Fonction EX-OU (XOR en anglais)

Au moins deux entrées sont nécessaires pour faire fonctionner un opérateur logique XOR. La table de vérité de la fonction XOR est la suivante :

x	y	x XOR y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Le sigle employé pour représenter cette fonction logique est le suivant :

La fonction XOR peut être reproduite avec des composants discrets selon le schéma suivant :



A titre d'exemple, les circuits intégrés suivants regroupent des opérateurs XOR :

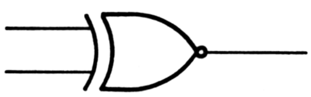
TTL : 7486 C-MOS : 4030

g) OU exclusif inversé : Fonction EX-NON-OU (XNOR en anglais)

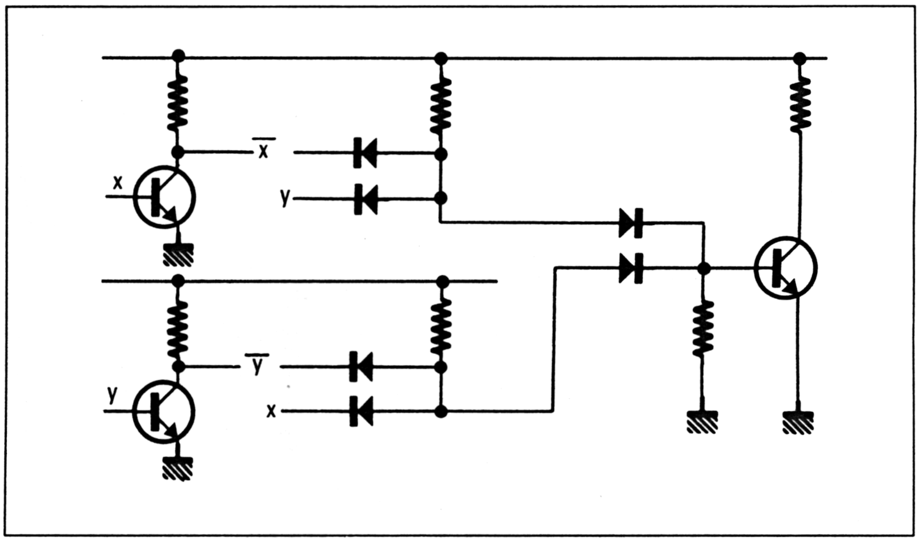
Au moins deux entrées sont nécessaires pour faire fonctionner un opérateur logique XNOR. La table de vérité de la fonction XNOR est la suivante :

x	y	x XNOR y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Le sigle employé pour représenter cette fonction logique est le suivant :



La fonction OU exclusif inversé peut être reproduite avec des composants discrets selon le schéma suivant :



A titre d'exemple, les circuits intégrés suivants regroupent des opérateurs XNOR :

TTL : 74266 C-MOS : 4077

Tableaux de Karnaugh :

Un circuit logique est composé d'une association plus ou moins complexe des circuits élémentaires que nous venons de décrire (NOT, OR, AND, NOR, NAND, XOR, XNOR). Pour minimiser le nombre de fonctions logiques utilisées pour le réaliser, nous utiliserons la méthode de Karnaugh.

Supposons que les variables en entrée soient au nombre de quatre (x, y, z et t), et que la sortie s soit définie de la façon suivante :

x	y	z	t	s
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

Cette table de vérité donne lieu au tableau de Karnaugh suivant :

xy \ zt	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	1	0	1	1
11	1	1	1	0
10	0	0	1	0

La méthode de simplification consiste à réunir la plus grande puissance de deux possible de « 1 » consécutifs en les encerclant, dans le sens horizontal ou vertical. L'expression logique qui en découle est d'autant plus simple que la surface encerclée est grande.

Par exemple, si nous encadrons la troisième colonne (qui contient 4 « 1 » donc une puissance de deux),

xy \ zt	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	1	0	1	1
11	1	1	1	0
10	0	0	1	0

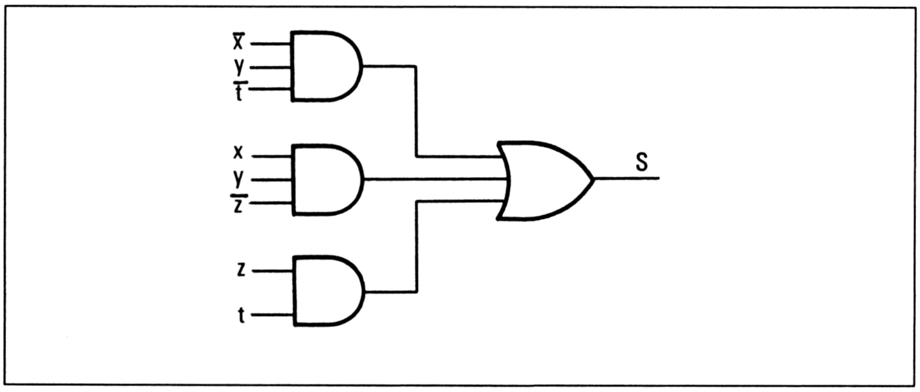
l'équation résultante sera obtenue en extrayant des variables d'entrée celles qui ne bougent pas : ici z et t qui restent à 1 pour toutes les lignes.

L'équation complète sera donnée lorsque tous les 1 seront encerclés au moins une fois. Chaque partie encerclée s'écrit sous forme de produit et correspond à une fonction AND (représenté par un . ou rien du tout comme dans les exemples qui suivent, et deux parties encerclées différentes sont séparées par un opérateur OR (représenté par un +).)

xy \ zt	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	1	0	1	1
11	1	1	1	0
10	0	0	1	0

D'où l'équation $S = \bar{x}y\bar{t} + xy\bar{z} + zt$

Ce qui correspond au circuit logique suivant :



Exemples de recherche de fonction

Soit la table de vérité suivante :

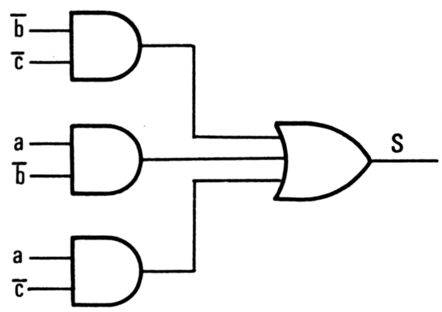
a	b	c	s
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Cette table de vérité donne lieu au tableau de Karnaugh suivant :

a \ bc	00	01	11	10
0	1	0	0	0
1	1	1	0	1

D'où l'équation de la sortie : $S = \bar{b}\bar{c} + a\bar{b} + a\bar{c}$

Ce qui correspond au circuit logique suivant :



Soit la table de vérité suivante :

a	b	c	d	e	s
0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	0	0
0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	0
0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0
0	1	1	1	0	0
0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	0
1	0	1	1	0	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0
1	1	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0
1	1	1	0	1	0
1	1	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1

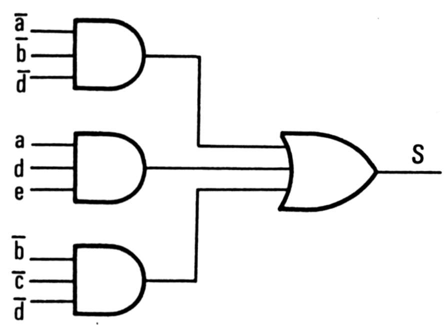
Cette table de vérité donne lieu au tableau de Karnaugh suivant :

abc \ de	00	01	11	10
000	1	1	0	0
001	1	1	0	0
011	0	0	0	0
010	0	0	0	0
110	0	0	1	0
111	0	0	1	0
101	0	0	1	0
100	1	1	1	0

D'où l'équation de sortie :

$$S = \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{d} + ade + \bar{b}\,\bar{c}\,\bar{d}$$

Ce qui correspond au circuit logique suivant :



C. LOGIQUE COMBINATOIRE

Les unités logiques et arithmétiques (ULA) des microprocesseurs travaillent en binaire et font sur les nombres manipulés des opérations arithmétiques.

Nous allons étudier le fonctionnement de circuits :

— additionneurs et soustracteurs binaires ;

— décodeurs ;

— multiplexeurs et démultiplexeurs.

Addition binaire

Dans un premier temps, nous allons nous restreindre à l'addition de deux bits a et b, donnant lieu à un résultat S sur un bit et à une retenue R :

a	b	S	R
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

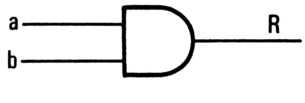
L'équation de la sortie est la suivante :

$S = \bar{a}b + a\bar{b}$ soit $S = a \text{ XOR } b$

L'équation de la retenue est la suivante :

$R = ab$

Nous voyons donc qu'un circuit logique additionneur à un bit peut se représenter de la manière suivante :



Nous allons maintenant passer à un additionneur qui travaille sur deux bits, et qui tient compte d'un bit de retenue :

Rn – 1	An	Bn	Sn	Rn
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

L'équation de la sortie est la suivante :

$Sn = (An \oplus Bn)\,\overline{Rn-1} + (\overline{An \oplus Bn})\,Rn-1$

Cette équation se simplifie en :

$Sn = An \oplus Bn \oplus Rn-1$

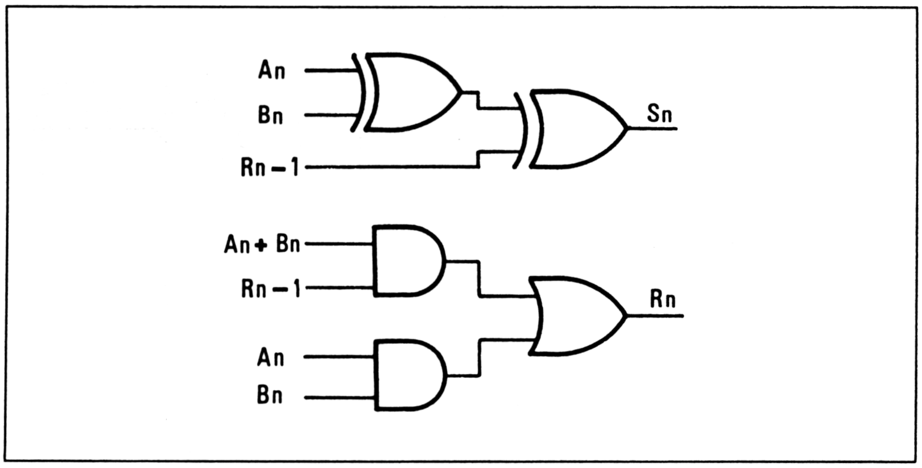
L'équation de la retenue est la suivante :

$Rn = \overline{Rn-1}\,(An \oplus Bn) + Rn-1\,(\overline{An \oplus Bn})$

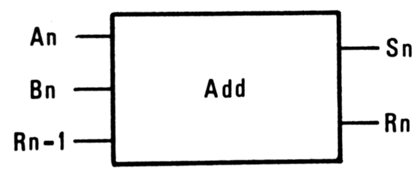
Cette équation se simplifie en :

$Rn = Rn-1\,(An \oplus Bn) + AnBn$

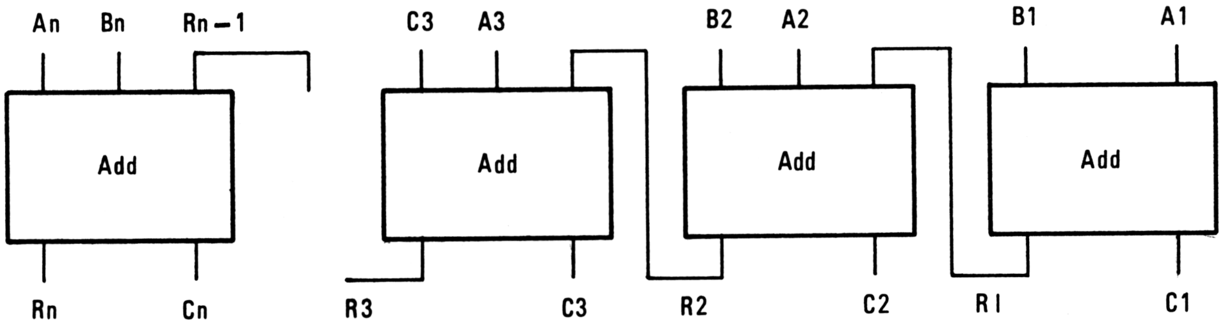
Nous voyons donc qu'un circuit logique additionneur à deux bits peut se représenter de la manière suivante :



Si nous prenons la convention de représentation suivante :



un additionneur à n bits se représentera de la manière suivante :



Soustraction binaire

Dans un premier temps, nous allons nous restreindre à la soustraction de deux bits a et b, donnant lieu à un résultat D sur un bit et à une retenue R :

a	b	D	R
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	0
1	1	0	0

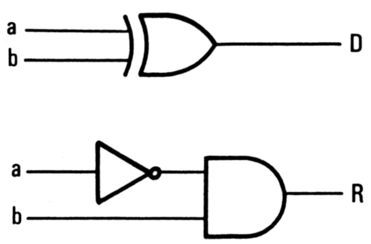
L'équation de la sortie est la suivante :

$D = \bar{a}b + a\bar{b}$ soit $S = a \text{ XOR } b$

L'équation de la retenue est la suivante :

$R = \bar{a}b$

Nous voyons donc qu'un circuit logique soustracteur à un bit peut se représenter de la manière suivante :



Nous allons maintenant passer à un soustracteur qui travaille sur deux bits, et qui tient compte d'un bit de retenue.

Rn − 1	An	Bn	Dn	Rn
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

L'équation de la sortie est la suivante :

$Dn = (An \oplus Bn)\ \overline{Rn-1} + (\overline{An \oplus Bn})\ Rn-1$

Cette équation se simplifie en :

$Dn = An \oplus Bn \oplus Rn-1$

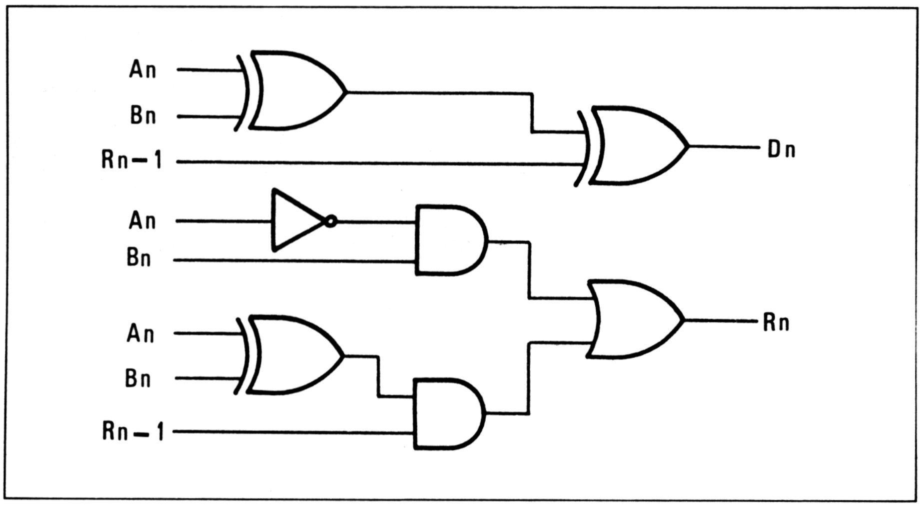
L'équation de la retenue est la suivante :

$Rn = \overline{Rn-1}.\overline{An}.Bn + Rn-1.\overline{An}.\overline{Bn} + Rn-1.\overline{An}.Bn + Rn-1.An.Bn$

Cette équation se simplifie en :

$Rn = \overline{An}.Bn + Rn-1\ (\overline{An \oplus Bn})$

Nous voyons donc qu'un circuit logique soustracteur à deux bits peut se représenter de la manière suivante :



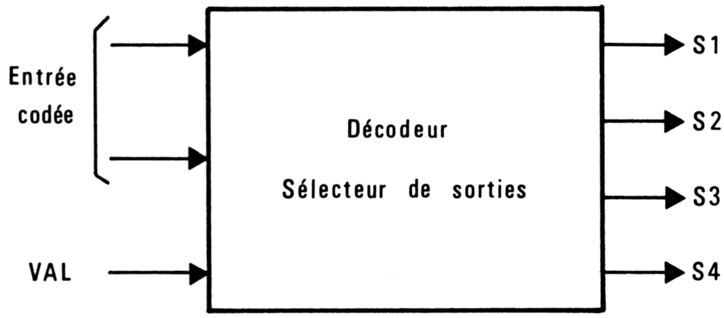
Circuits décodeurs (sélecteurs de sorties)

Définition

Un décodeur est un circuit combinatoire à l'entrée duquel on applique un code binaire de n bits. Le décodeur a N sorties (N = 2↑n). Sa particularité est de délivrer pour chaque code en entrée une seule sortie à l'état inverse de toutes les autres.

Remarque :

Une entrée spéciale appelée VALidation est souvent présente sur un circuit décodeur. Elle permet d'autoriser/interdire le fonctionnement du circuit.



Pour ce décodeur ultra simple, nous pourrons avoir les conventions suivantes :

VAL = 1, toutes les sorties sont à 1 quels que soient les codes en entrée A et B

VAL = 0, A = 0 B = 0 S1 = 1, S2 = S3 = S4 = 1
VAL = 0, A = 1 B = 0 S2 = 1, S1 = S3 = S4 = 1
VAL = 0, A = 0 B = 1 S3 = 1, S1 = S2 = S4 = 1
VAL = 0, A = 1 B = 1 S4 = 1, S1 = S2 = S3 = 1

Ce qui donne lieu aux tableaux de Karnaugh suivants :

S1	A	0	1
B	0	0	1
	1	1	1

S2	A	0	1
B	0	1	0
	1	1	1

S3	A	0	1
B	0	1	1
	1	0	1

S4	A	0	1
B	0	1	1
	1	1	0

D'où les équations suivantes :

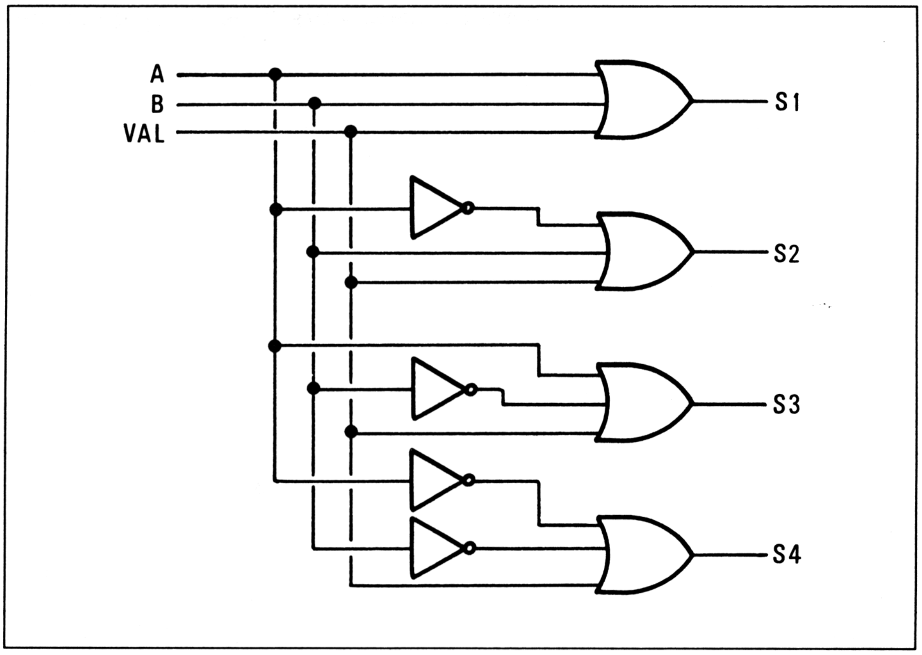
$S1 = A + B + VAL$

$S2 = \overline{A} + B + VAL$

$S3 = A + \overline{B} + VAL$

$S4 = \overline{A} + \overline{B} + VAL$

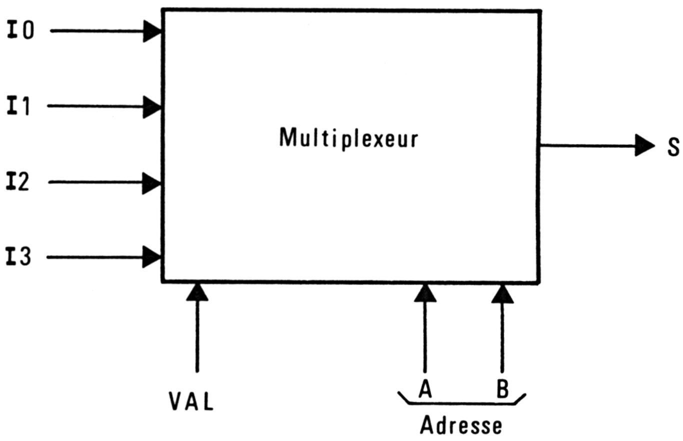
Un tel circuit se représente donc de la manière suivante :



Multiplexeur

Définition :

Un multiplexeur est un circuit qui possède n entrées et qui transmet sur sa sortie S une de ces entrées au choix. Pour sélectionner cette entrée, le circuit multiplexeur reçoit une adresse en entrée. Comme pour le circuit précédent, une entrée VALidation est souvent disponible. Cette entrée permet d'autoriser/interdire le fonctionnement du circuit.



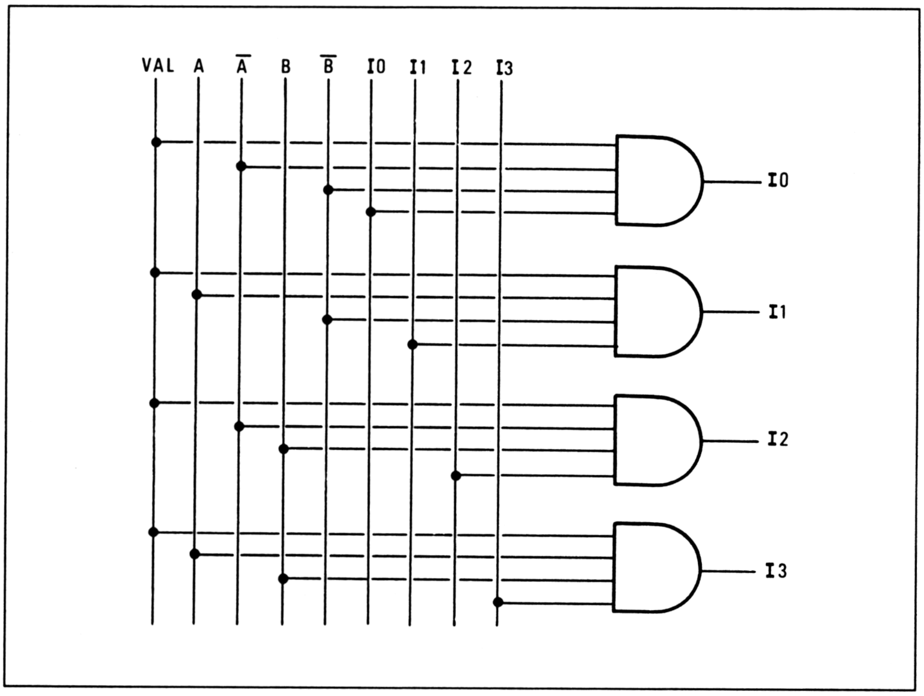
Pour ce multiplexeur ultra simple, nous pourrons avoir les conventions suivantes :

VAL = 0. La sortie est à 0 quelles que soient les valeurs envoyées sur les adresses.

VAL = 1. Le multiplexage est autorisé.

A = B = 0	S = I0
A = 1, B = 0	S = I1
A = 0, B = 1	S = I2
A = B = 1	S = I3

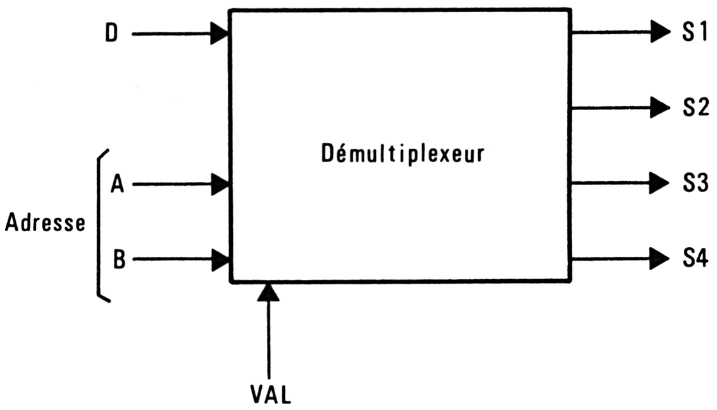
Ce qui donne lieu au circuit logique suivant :



Démultiplexeur

Définition :

Un démultiplexeur est un circuit de décodage dans lequel la ligne identifiée par l'adresse présentée en entrée est reliée à l'entrée D.



Logique séquentielle

Comme il a été dit plus haut, la logique séquentielle implique que la sortie à un instant t dépend de l'état des variables d'entrée à cet instant et de l'état des sorties au temps $t-1$.

Nous allons étudier le fonctionnement des bascules et des registres qui sont des circuits régis par la logique séquentielle.

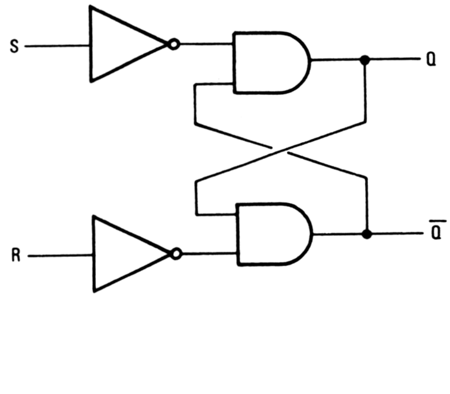
Bascules

Une bascule (ou flip-flop) possède une sortie Q et éventuellement son complémentaire $\overline{Q}$. Selon que la sortie Q est à 0 ou à 1, on dit que la bascule est dans un état 0 ou 1. Cet état est mémorisé tant que l'alimentation de la bascule n'est pas coupée. Une bascule est l'élément de base des mémoires RAM des ordinateurs.
Nous allons présenter successivement les bascules de type RS, RST, D et maître esclave.

a) Bascule RS :

Cette bascule est asynchrone : la sortie change d'état en fonction des entrées sans être synchronisée par un signal d'horloge (d'où le terme de bascule asynchrone). Elle correspond au schéma suivant :

R	S	Qn + 1
0	0	Qn
0	1	1
1	0	0
1	1	?



L'équation de la bascule RS est donc : $Qn+1 = \overline{R}\,.\,\overline{S}\,.\,Qn + \overline{R}\,.\,S + R.S$

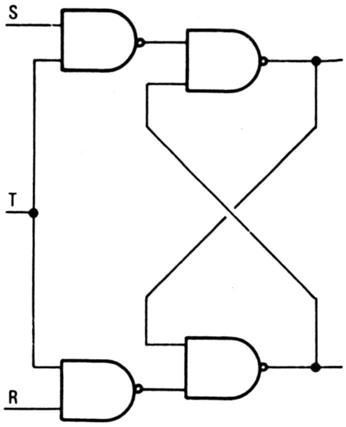
Qn \ RS	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	1	1	1	0

Cette équation se simplifie donc en : $Qn+1 = S + Qn.\overline{R}$

b) Bascule RST :

Cette bascule est synchrone : la sortie change d'état en fonction des entrées en étant synchronisée par un signal d'horloge (d'où le terme de bascule synchrone).

Elle correspond au schéma suivant :



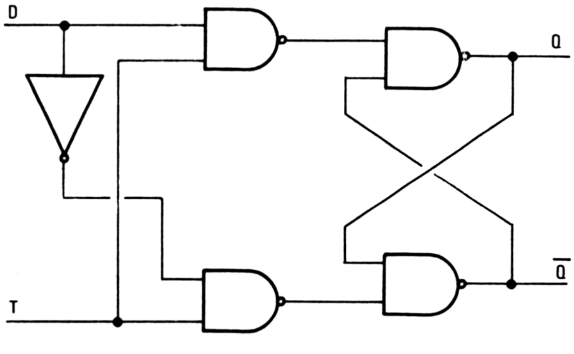
R	S	Qn+1
0	0	Qn
0	1	1
1	0	0
1	1	?

Les entrées R et S ne sont prises en compte par la bascule qu'au front montant de l'horloge.

L'équation de la bascule RST est la même que celle de la bascule RS.

c) Bascule D :

Elle correspond au schéma suivant :



D	Q
0	0
1	1

d) Bascule Maître/Esclave :

Ces bascules sont composées de deux « étages » :

— un étage dit maître recevant les informations sur deux entrées RS ou JK

— un étage dit esclave commandé à partir de l'étage maître et qui délivre les informations à la sortie de la bascule.

Les opérations se déroulent dans l'ordre chronologique suivant :

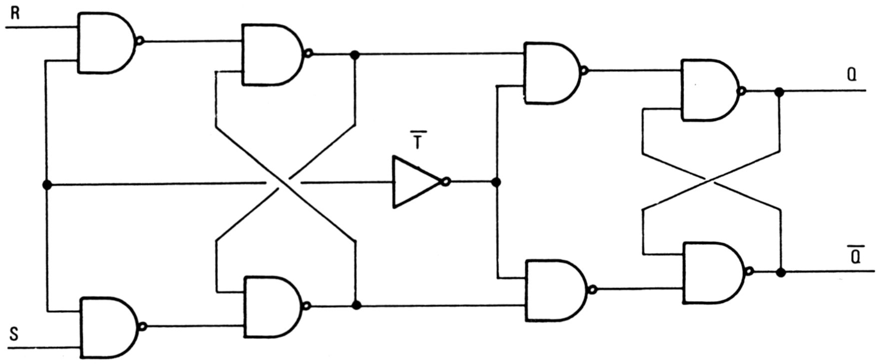
— maître et esclave isolés ;

— introduction de l'information dans l'étage maître ;

— déconnexion des entrées ;

— transfert de l'information du maître vers l'esclave.

e) Bascule Maître/Esclave de type RS :



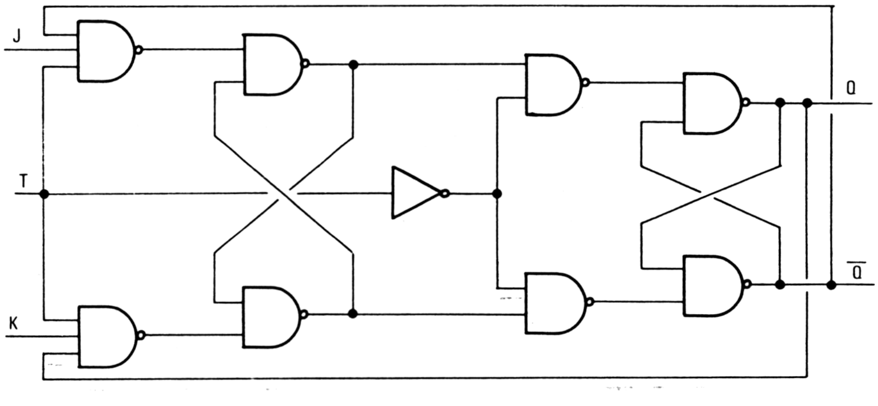
T = 1 : Pas de liaison maître-esclave. L'information reste dans l'étage maître.

T = 0 : L'information est transférée de l'étage maître vers l'étage esclave.

Cette information est disponible en sortie et les entrées sont ignorées.

La table de vérité d'une telle bascule est identique à celle de la bascule RST.

Bascule Maître/Esclave de type JK :



Le principe est le même que pour la bascule maître/esclave de type RS, à ceci près que le cas R = S = 1 (ici J = K = 1) donne une sortie bien définie :

J	K	Qn + 1
0	0	Qn
0	1	0
1	1	$\overline{Qn}$
1	0	1

Registres à décalage

Définition :

Un registre à décalage est composé de n bascules (n> = 2). Il peut donc emmagasiner une information de n bits. L'état logique de la bascule de rang i est transmis à la bascule de rang i + 1 de manière synchrone en utilisant un signal d'horloge.

- Entrées/Sorties d'un registre

L'entrée d'un registre peut être :

— série : les informations sont présentées bit par bit à l'entrée de la première bascule. A chaque impulsion d'horloge, le bit est transmis à la bascule suivante.

— parallèle : tous les bits sont introduits en même temps dans le registre.

La sortie d'un registre peut être :

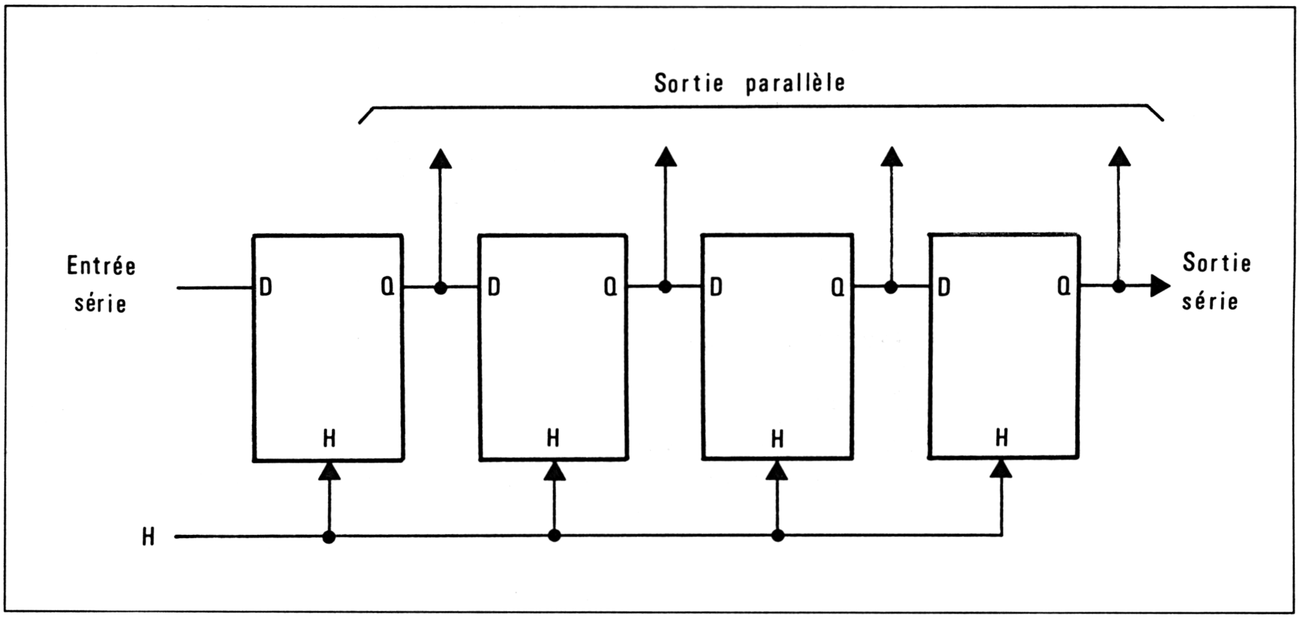
— série : l'information est sortie bit par bit sur la dernière bascule ;

— parallèle : toutes les sorties du registre sont accessibles à tout moment.

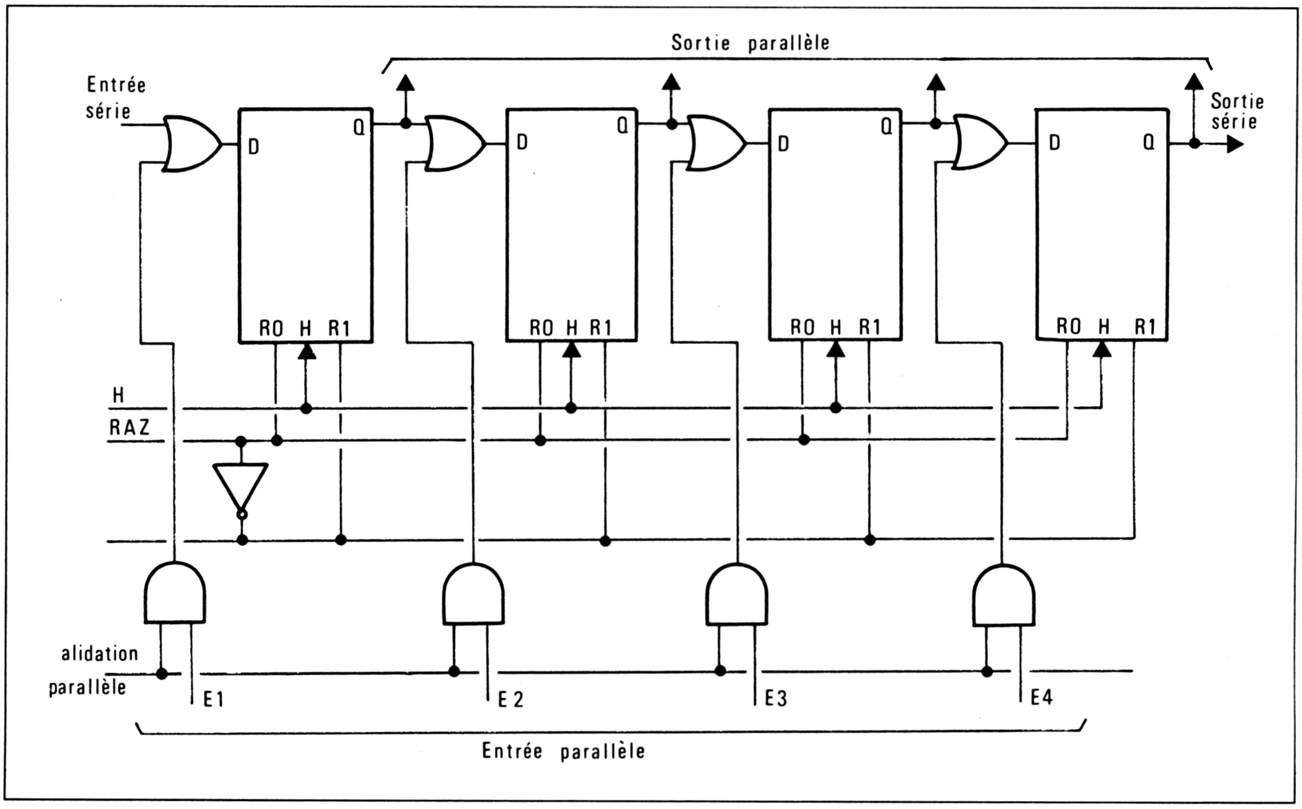
Exemples de registres :

Les registres courants sont composés de bascules de type D, RS, RST ou JK.

Registre 4 bits à entrée série, sortie série ou parallèle à base de bascules de type D : (voir page suivante)



Registre 4 bits à entrée série, sortie série ou parallèle à base de bascules de type D :



13/1.2.1

Les mémoires à accès aléatoire *(Random Access Memory)*

L'ordinateur a souvent été comparé au cerveau humain. Cela est dû essentiellement au fait que l'on ne peut imaginer une machine capable de traiter des informations sans qu'elle soit dotée de nombreuses cases où elle peut stocker ces informations, un peu comme le fait le cerveau humain avec ses très nombreuses cellules cérébrales, les neurones.

Il est en effet évident que l'on ne peut faire effectuer une opération de calcul à une machine sans qu'elle soit dotée de registres lui permettant de stocker les nombres ou les résultats des opérations effectuées.

Une fois le système doté de mémoire, encore faut-il lui permettre de retrouver les données stockées au moment voulu parmi les millions d'informations stockées.

C'est pourquoi il est absolument impératif de ne pas dissocier les deux notions de mémoire et d'adresse lorsque l'on parle de mémoire d'ordinateur.

Le plus petit élément de mémoire : la bascule bistable

Un élément de mémoire est donc une cellule unitaire qui est capable d'enregistrer la valeur 0 ou 1. On parlera alors de cellule de mémoire, de registre ou de position.

Les circuits TTL de la série 747 proposent des assemblages de bascules bistables capables de conserver un état choisi parmi deux possibilités. Mais pour traiter des informations, il est impensable d'utiliser ce genre de circuit car il faudrait en disposer de milliers voire même de millions.

Le génie humain s'est donc attaché, dans le domaine de l'informatique, à miniaturiser ces cellules et surtout à diminuer la quantité d'énergie nécessaire pour conserver les informations emmagasinées.

BREF HISTORIQUE DE LA TECHNOLOGIE DES CIRCUITS DE MÉMOIRES

Mémoires à relais

Un simple interrupteur qui commande l'allumage ou l'extinction d'une ampoule électrique peut être assimilé à une cellule de mémoire puisqu'il conserve une information unitaire sur l'état de l'ampoule qu'il commande. Cet interrupteur a été commandé par la pression d'un doigt, en informatique, il faudra remplacer la pression de ce doigt par l'apparition d'une tension sur un conducteur.

L'idée d'utiliser un électroaimant pour agir sur l'interrupteur vient alors. On invente donc le relais électromagnétique.

Ce relais est commandé directement par la tension à mettre en mémoire (voir figure 1).

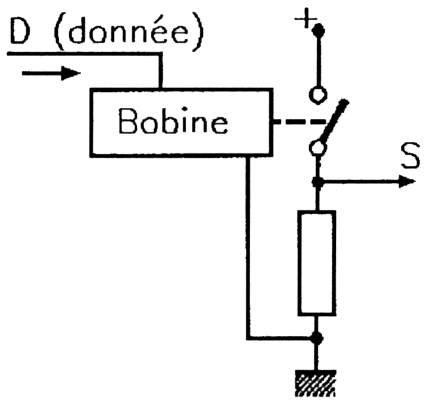


Fig. 1 : Le relais.

Ce circuit ne constitue pourtant pas une véritable mémoire car, dès que la tension (l'information) disparaît, le relais revient à sa position de repos. Il faut donc imaginer un dispositif qui maintiendra le relais en position enclenchée même après disparition de l'information. Il faudra néanmoins être capable de remettre la cellule de mémoire à zéro pour y stocker de nouvelles informations lorsque la précédente aura été exploitée. On obtient alors un circuit du type de la figure 2. Une information sur D ferme le circuit passant par I_1 et I_2 et une tension apparaît sur S qui maintient alors le circuit fermé. Si on veut remettre le circuit à zéro, il faudra alors agir sur le deuxième relais par la commande D barre.

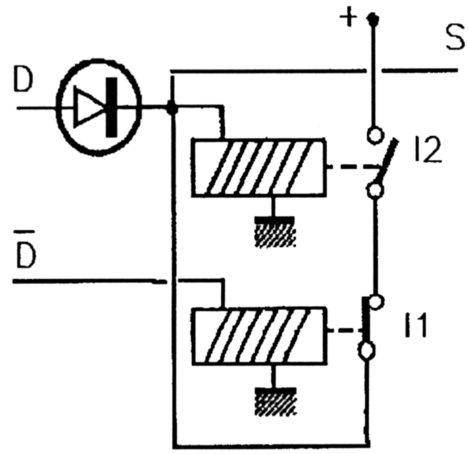


Fig. 2 : Mémoire à relais.

En disposant sur la sortie S un amplificateur non inverseur et un amplificateur inverseur, nous obtenons le schéma type d'une mémoire (figure 3) avec deux entrées D et D barre (S et R) et deux sorties S et S barre (Q et Q barre).

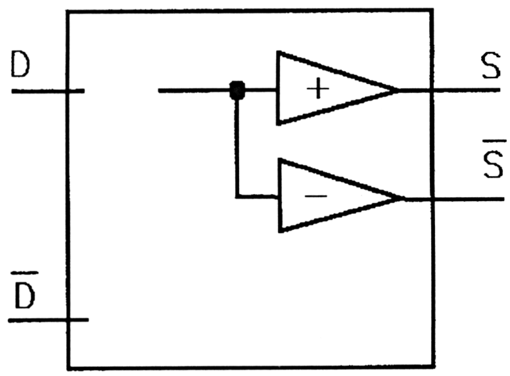


Fig. 3 : Schéma type de mémoire.

Ce registre à relais n'a plus de nos jours qu'un intérêt historique. Sa faible fiabilité est due à ses pièces mécaniques en mouvement et son encombrement et son coût l'ont fait vite abandonner des concepteurs d'ordinateurs.

Mémoires magnétiques

L'idée de supprimer toutes ces pièces en mouvement est née d'esprits créatifs. Si l'on ne garde du relais que sa bobine et son noyau, généralement de fer doux, celui-ci va s'aimanter dans une direction qui dépend du sens du courant qui traverse la bobine. Le phénomène d'hystérésis va alors permettre d'utiliser ce principe de mémoires, en effet, lorsque l'on cesse l'alimentation en courant de la bobine, le noyau reste aimanté faiblement mais il garde en mémoire le sens de sa dernière aimantation.

Lorsque la bobine est parcourue par un courant I, le noyau s'aimante dans une direction NS figurée par le point A de la figure 4.

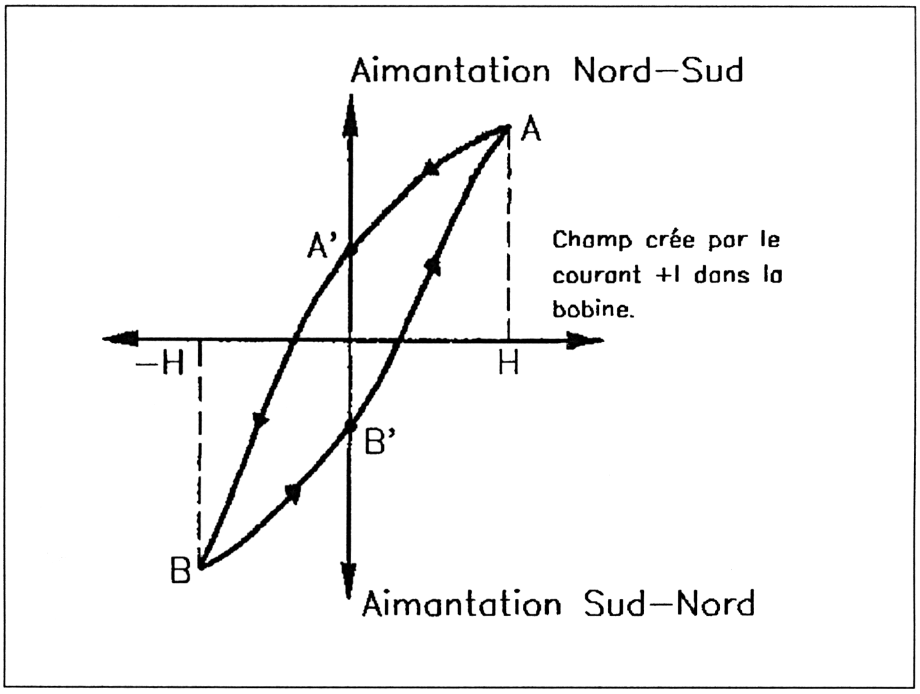


Fig. 4 : Hystérésis d'un noyau de fer doux.

Si le courant dans la bobine est interrompu, l'aimantation du noyau ne disparaît pas totalement et sera représentée sur la figure 4 par le point A'.

Lorsque l'on fait passer un courant inverse -I, l'aimantation du noyau s'inverse et atteint le point B pour revenir au point B' lorsque le courant dans la bobine est à nouveau interrompu.

Une amélioration de ce principe peut se faire en utilisant des tores au lieu de noyaux formés de barres. Les pertes d'aimantation étant plus faibles, l'information contenue sera gardée plus longtemps.

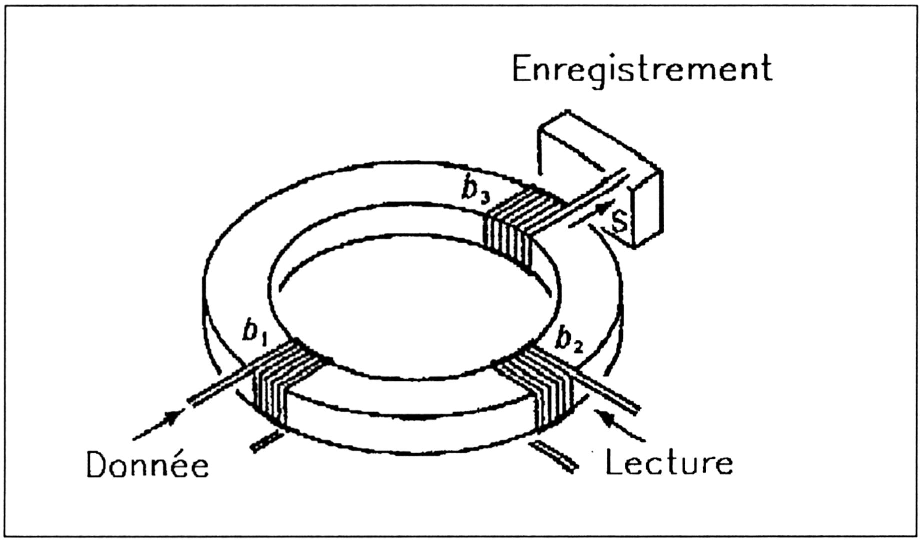


Fig. 5 : Principe de la mémoire à tore de ferrite.

Le bobinage b1, recevant l'information, une aimantation rémanente conservera celle-ci dans le tore. Cette information sera alors lue par le bobinage b2 enroulé en sens inverse du précédent. Une impulsion envoyée sur ce bobinage inversera l'aimantation de l'anneau. Cette aimantation prendra donc successivement les valeurs A', B, B' de la figure 4. La lecture sera alors concrétisée par un troisième bobinage b3. Les variations d'aimantation de l'anneau induiront dans la bobine b3 de petites variations de courant dont les allures sont représentées sur la figure 6a.

Si la donnée mise en mémoire est un zéro, la lecture amènera l'aimantation de B' à B puis à nouveau en B'. Ce qui donnera une réponse équivalente à celle représentée sur la figure 6b.

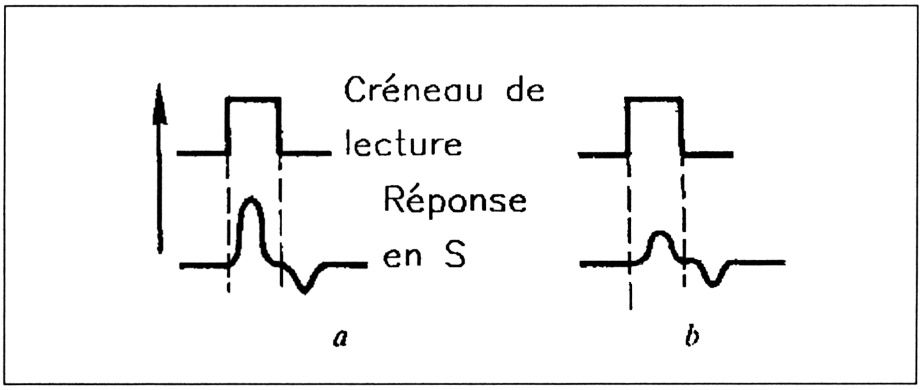


Fig. 6 : Lecture sur un noyau de fer doux.

Bien sûr, la différence entre les deux lectures n'est pas facile à discerner, c'est pourquoi les recherches dans ce domaine se sont orientées vers des matériaux ferromagnétiques dont la courbe d'hystérésis (figure 4) est la plus carrée possible.

Des alliages spéciaux permettent d'obtenir des courbes du type de celle représentée sur la figure 7. Les lectures sont alors très nettement différenciées comme le montre la figure 8.

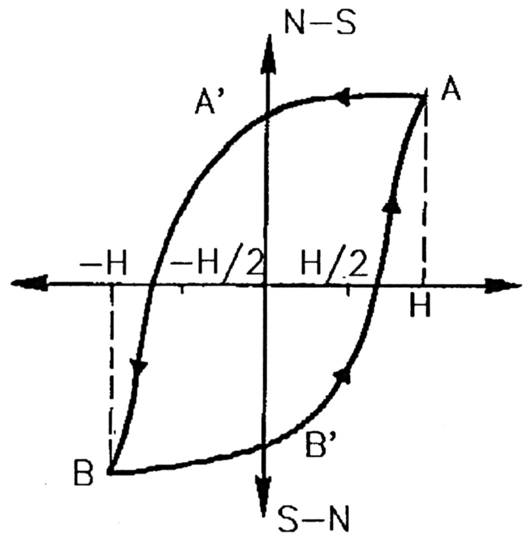


Fig. 7 : Hystérésis d'un noyau de ferrite.

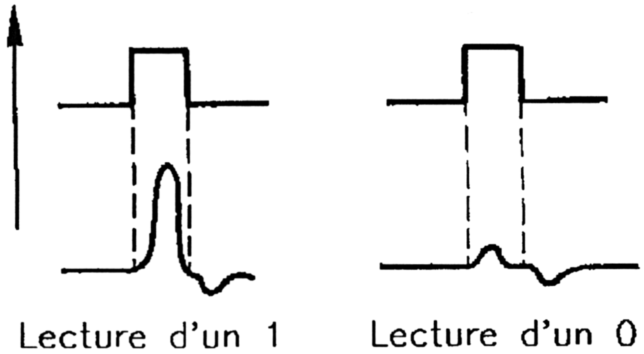


Fig. 8 : Lecture d'une aimantation rémanente sur un noyau de ferrite.

De tels tores, de 4 à 5 mm de diamètre ont été utilisés en réseau. Aussi, pour simplifier le véritable travail de broderie que constituaient ces réseaux, on a été amené à réduire les bobines à un seul demi-tour de fil. Bien sûr cela s'est fait au détriment du niveau de lecture et les signaux lus ont dû alors être largement amplifiés (figure 9).

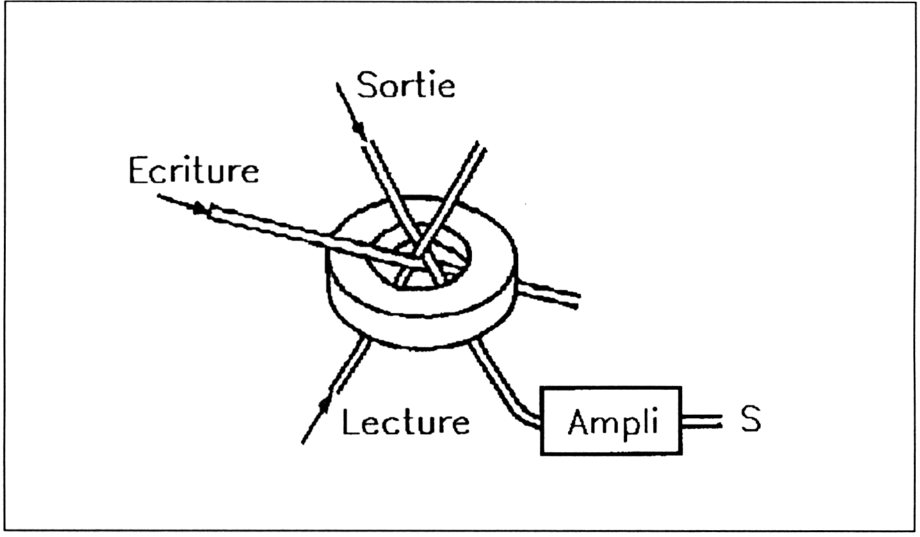


Fig. 9 : Ecriture/lecture d'un tore de ferrite.

Matrices de ferrite

Soixante-quatre tores de ferrites sont groupés en une matrice de huit lignes et huit colonnes selon la disposition de la figure 10.

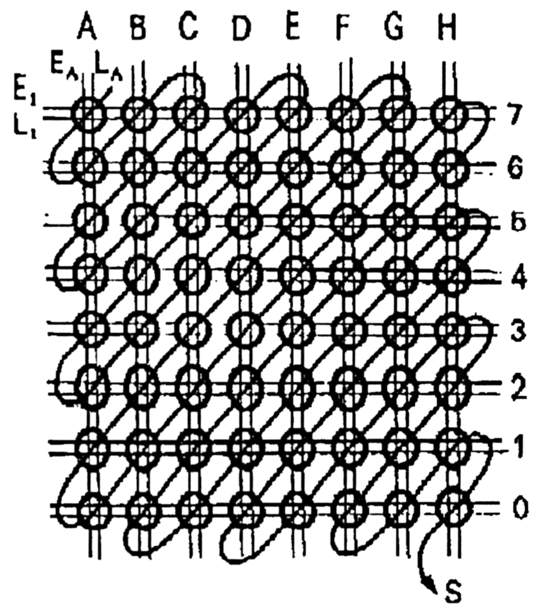


Fig. 10 : Matrice de tores ferrite.

A travers chaque tore passent deux fils d'écriture, l'un horizontal, l'autre vertical et deux fils de lecture également horizontal et vertical.

Pour écrire un 1 dans le tore E4, il suffit de sélectionner le fil de la colonne E et le fil de la rangée 4 et de faire passer dans ces fils d'écriture un courant d'intensité H/2. Ce courant est insuffisant pour faire basculer les tores qui ne reçoivent qu'une valeur H/2 parce que traversés par un seul des deux fils E et 4. Seul le tore E4 situé à l'intersection de E et 4 recevra la quantité double de courant H capable de faire changer son état.

Pour lire ce même tore, on procédera de la même façon mais cette fois avec les fils d'écriture.

Ces matrices de tores ont été beaucoup utilisées dans les gros ordinateurs de gestion. Elles sont rapides, ne consomment pas beaucoup d'énergie, sont non volatiles puisqu'elles conservent l'information même après la coupure du courant, mais sont encombrantes et la lecture les remet en position zéro. La lecture est donc destructrice.

Les technologies actuelles

Mémoires TTL

La cellule de mémoire TTL s'inspire du Flip-flop, c'est-à-dire d'une bascule bistable. Des aménagements de cette bascule sont nécessaires afin de l'organiser en matrice. Une cellule de mémoire est représentée sur la figure 11. On y remarque en particulier deux fils de colonne, l'un à droite, l'autre à gauche correspondant aux deux transistors de la bascule, ainsi qu'un fil de ligne.

Ces fils de ligne ou de colonne seront portés à des potentiels de 3 volts pour la valeur 1 et 0,5 volts pour la valeur 0. Le fil de gauche traduit la valeur mémorisée, le fil de droite indique son complément.

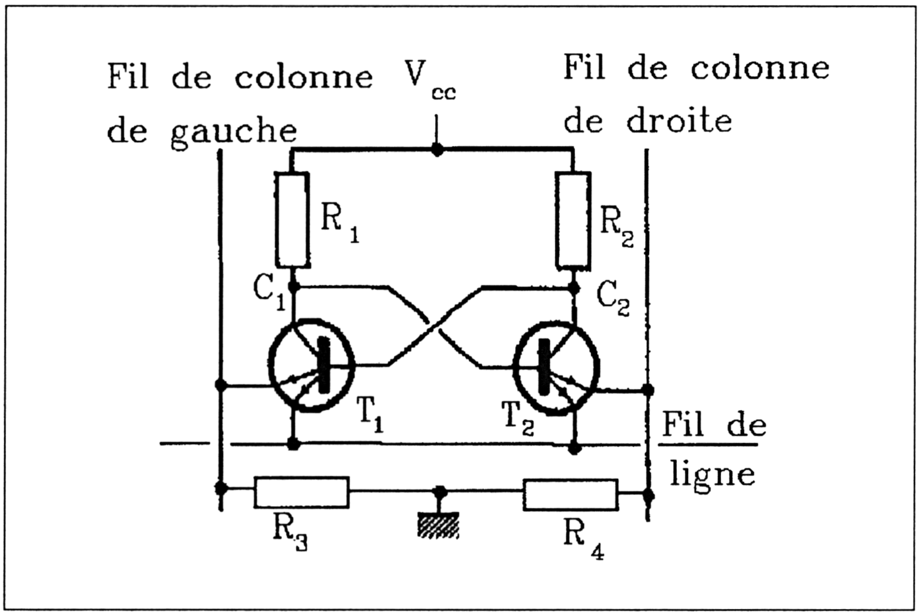


Fig. 11 : Cellule de mémoire TTL.

• *Ecriture*

Pour inscrire 1 dans une telle bascule, nous porterons le fil de ligne et le fil de colonne de gauche à 3 volts alors que le fil de colonne de droite sera porté à 0,5 volts.

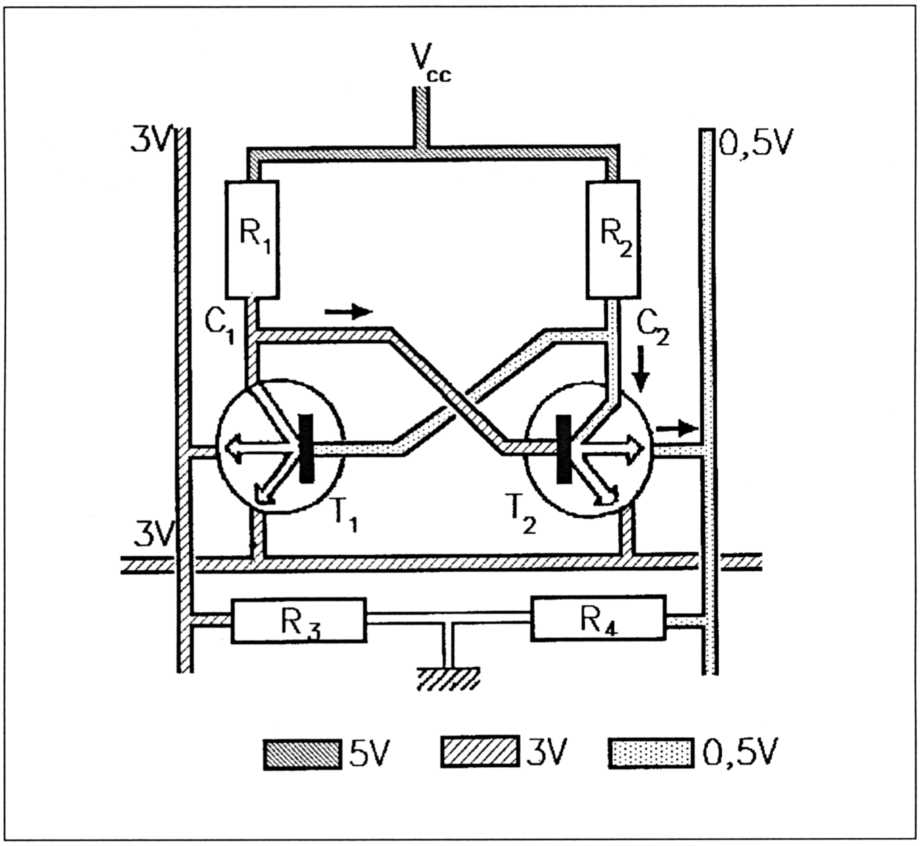


Fig. 12 : Fonctionnement d'une cellule TTL.

Un des deux émetteurs de T_2 étant à 0,5 volts alors que sa base reçoit un courant à travers R1, T_2 devient conducteur. Le potentiel de son collecteur est voisin de 0,5 volts (C_2).

Comme les deux émetteurs de T_1 sont portés à 3 volts alors que sa base (par C_2) est à 0,5 volts, ce transistor T_1 est bloqué, ce qui augmente le potentiel en C_1 et sature T_2.

Cette situation est stable même après le passage des impulsions lorsque les deux fils de colonne et le fil de ligne sont ramenés à un potentiel 0. La valeur 1 a été enregistrée et elle est donc mémorisée sous forme d'une tension voisine de V_{CC} en C_1 et voisine de 0 en C_2.

• *Lecture*

La lecture n'exige qu'une impulsion sur le fil de ligne, en effet : en l'absence de cette impulsion, le fil de ligne étant au potentiel 0 alors que le fil de colonne de droite est au potentiel du collecteur (environ 0,5 volts), des deux émetteurs de T_2, c'est l'émetteur E_1, branché sur le fil de ligne qui conduit (figure 13).

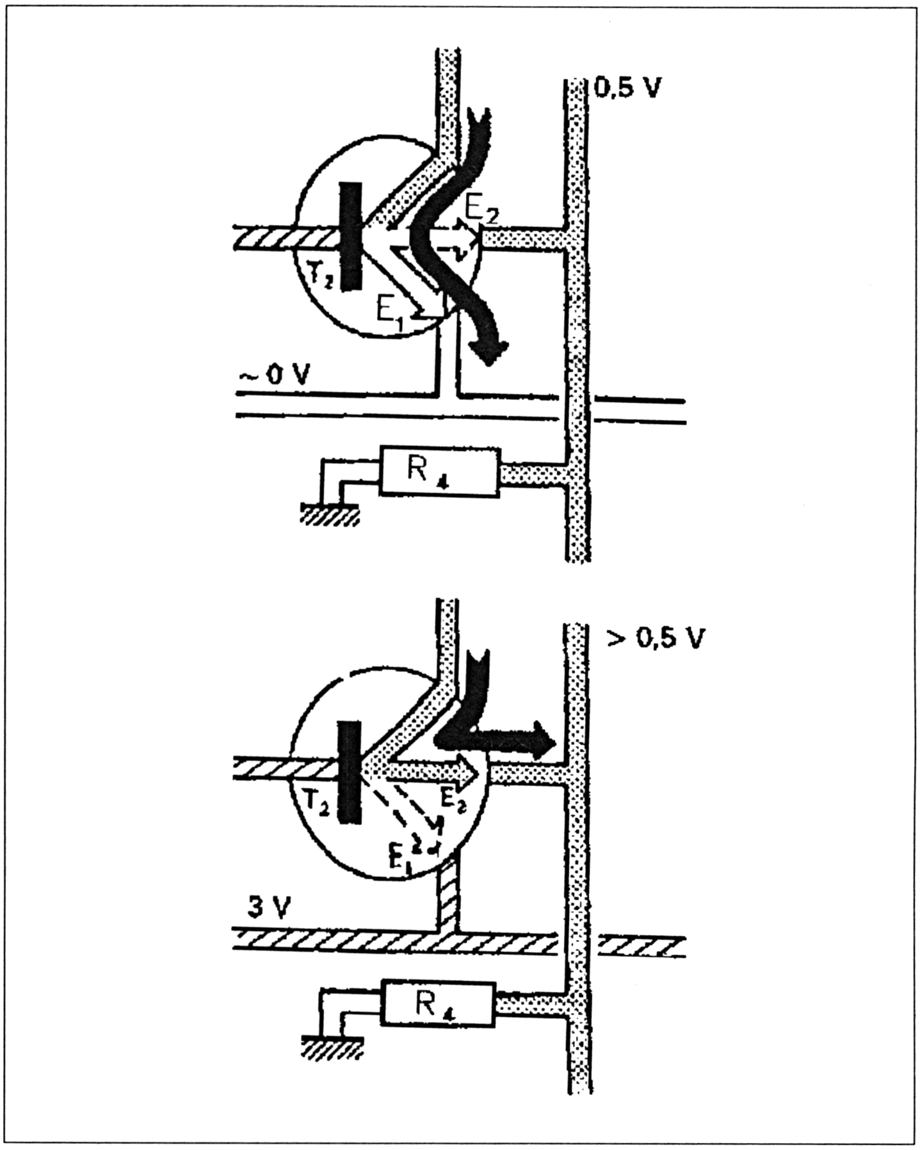


Fig. 13 : Lecture d'une cellule TTL.

Au passage de l'impulsion sur le fil de ligne, l'émetteur E_1 ne conduit plus. E_2 devient alors conducteur. Le fil de colonne de droite est alors porté à un potentiel légèrement supérieur à 0,5 volts, correspondant à cette tension de 0,5 volts augmentée de la tension créée par le courant de E_2 à travers la résistance R_4 (ainsi que toutes les résistances analogues branchées en parallèle sur ce fil de colonne).

Un comparateur monté en sortie sur les deux fils de colonne permet d'amplifier cette élévation de potentiel en sortie.

• *Bilan*

La cellule de mémoire TTL présente un avantage essentiel qui est sa rapidité. Entre le moment où l'adresse est appliquée sur le registre sélecteur des lignes et des colonnes et le moment où l'information apparaît à la sortie (temps d'accès), il s'écoule environ 30 nanosecondes.

En contrepartie, les cellules TTL sont consommatrices de courant, ce qui interdit une trop grande concentration de ces cellules dans un circuit intégré sous peine de le voir fondre.

On peut trouver des RAM de 1024 cellules sous forme de boîtiers 22 broches comme le circuit de Motorola MCM93422 par exemple.

Mémoires MOS statiques

Le schéma d'une cellule de mémoire MOS est très voisin de celui de la cellule TTL.

La principale qualité de ce type de mémoire est sa faible consommation qui autorise une forte intégration.

Pour diminuer encore cette consommation les constructeurs ont introduit un système de mise en veilleuse : lorsque le circuit n'est pas sollicité, les cellules sont placées sous faible tension (2 volts), suffisante pour que l'information en mémoire soit préservée. Dès qu'un ordre de lecture ou d'écriture est appliqué, la tension de service (5 à 12 volts) est aussitôt rétablie sur la colonne de la cellule activée.

On parvient ainsi à diviser par dix la consommation de la cellule au repos par rapport à celle de la cellule activée.

En contrepartie, la mémoire MOS est lente. Le temps d'accès des premiers circuits fabriqués était de l'ordre de la microseconde ; c'est pourquoi les constructeurs se sont ingéniés à réduire l'épaisseur et les dimensions des composants MOS, à intégrer de véritables résistances miniatures de charge, etc.

Les mémoires à accès aléatoire dynamiques (RAM dynamiques)

Tous ces types de mémoires sont appelés RAM *(Random Access Memory)* c'est-à-dire mémoires à accès aléatoire. Cela signifie que l'on peut accéder à chacune de ces cellules mémoire séparément grâce à son adresse. La RAM permet également d'enregistrer, de lire et d'effacer les informations qu'elle contient. Une RAM perd les informations qu'elle contient dès qu'elle n'est plus alimentée en courant. On dit que cette mémoire est volatile. Les RAM organisées autour de bascules bistables sont appelées statiques car elles gardent l'information contenue sans avoir besoin d'être «rafraîchies», au contraire les RAM dynamiques nécessitent d'être rafraîchies car elles ne conservent l'information qu'un court instant.

Pour réaliser une RAM statique avec un Flip-flop, nous avons vu qu'il faut intégrer quatre transistors MOS (2 servant à la charge). Les recherches d'intégration ont abouti à une cellule à un seul MOS.

L'élément mémoire est alors lui-même constitué par une capacité drain-substrat de ce MOS. Dans d'autres occasions, on parlerait de capacité parasite, alors qu'ici, cette capacité est fonctionnelle. Le MOS étant adressé, un 1 va alors s'écrire dans cette capacité (figure 14).

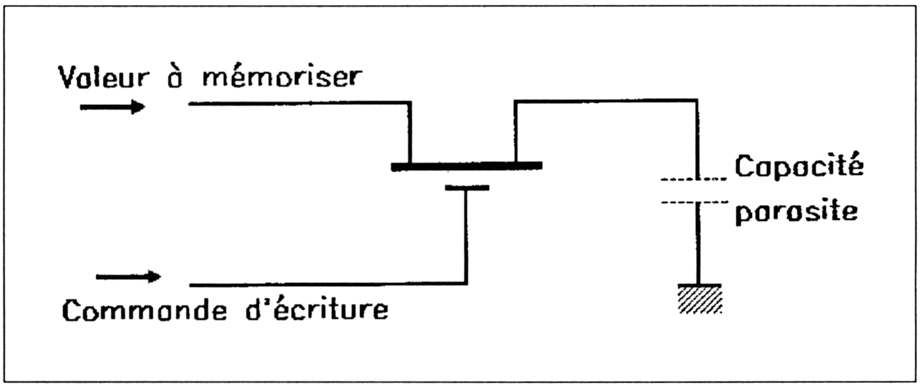


Fig. 14 : Ecriture en mémoire MOS.

Comme le MOS est bidirectionnel, on pourra, par un nouvel adressage, lire l'information. Malheureusement, toute capacité, parasite ou non, possède une résistance de fuite à travers laquelle elle se décharge. La mémoire aura donc perdu son information en quelques millisecondes. Pour qu'elle conserve cette information, il faudra restaurer celle-ci à des intervalles réguliers. Cette opération s'appelle rafraîchissement.

Pour cela, on utilisera un dispositif tel que représenté sur la figure 15. La mémoire est lue à travers un comparateur et cette lecture est aussitôt réintroduite dans la cellule de mémoire. L'entrée inverseuse du comparateur est portée à une valeur intermédiaire entre les tensions que donnerait une cellule chargé à 1 et une cellule chargée à 0. Ainsi, le basculement de la sortie du comparateur est-il toujours sans équivoque.

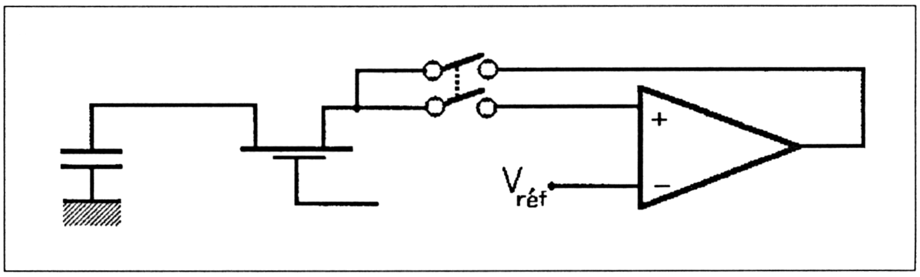


Fig. 15 : Lecture sur MOS.

De telles mémoires, qui peuvent être adressées, lues, et écrites sont aussi des RAM. Comme ces mémoires ne conservent pas l'information qu'elles contiennent et qu'il faut sans cesse les rafraîchir (en général toutes les 2 millisecondes) on les a qualifiées de dynamiques.

Ce rafraîchissement complique quelque peu l'implantation de ces mémoires mais les constructeurs proposent des circuits intégrés contenant tout le dispositif de rafraîchissement. Dans d'autres cas, c'est le microprocesseur auquel elles sont rattachées qui assure leur rafraîchissement (Z80 de Zilog).

La simplicité de conception et la faible consommation de la cellule MOS permettent une forte intégration de ces cellules en un seul circuit. Les progrès technologiques ont permis de corriger le défaut majeur de ce type de mémoires, à savoir leur temps d'accès très long. Les temps d'accès courants maintenant sont de l'ordre de 80 à 120 nanosecondes, ce qui est tout à fait compatible avec la vitesse de calcul des microprocesseurs d'aujourd'hui. Le nombre de pattes des circuits a également été optimisé. L'adresse seule exige l'envoi de 16 bits pour un circuit de 65536 cellules (2^{16} bits) sur les entrées de sélection de colonnes et lignes. Les constructeurs ont imaginé d'envoyer cette adresse en deux temps : une première partie où la moitié basse *des bits A_7 à A_0 est envoyée pour sélectionner les lignes, en* deuxième temps, la partie haute, composée des bits A_{15} à A_8 parvient au circuit pour assurer la sélection des colonnes.

Simultanément, deux commandes sont activées tour à tour, RAS *(Raw Adress Strobe)* pour les lignes et CAS *(Column Adress Strobe)* pour les colonnes (figure 16). En outre, une commande R/W permet de placer le circuit en lecture ou écriture (Read/Write).

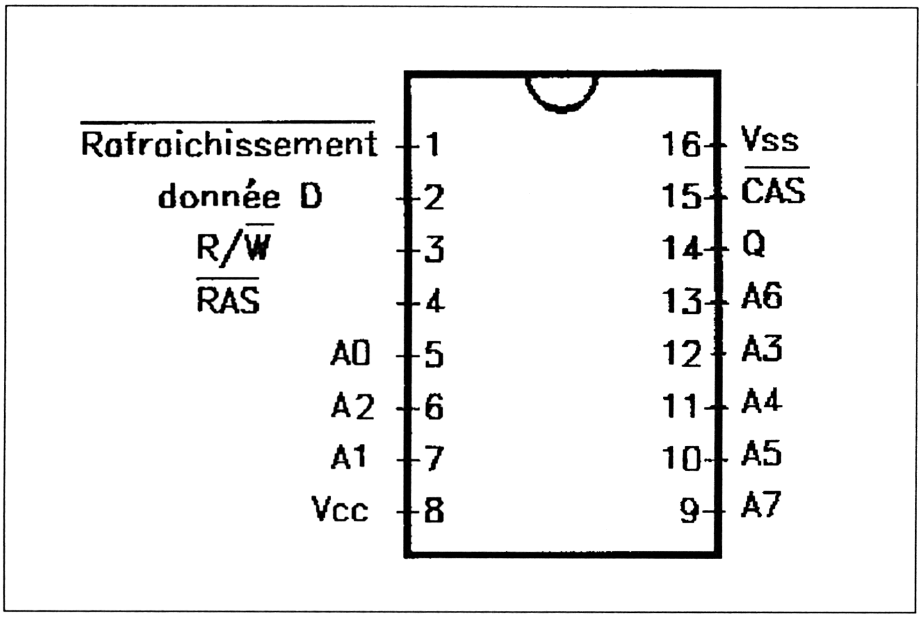


Fig. 16 : Brochage du circuit mémoire EF 6664.

13/2

Eléments de mathématiques générales

Ce chapitre, sans avoir la prétention de concurrencer les manuels scolaires, apporte au lecteur les connaissances de base nécessaires pour aborder l'informatique sans difficulté.

La science de base est évidemment « la Mathématique », c'est pourquoi elle se doit de figurer ici. Depuis les notions élémentaires en forme de définitions, jusqu'aux concepts les plus abstraits, ce chapitre vous conduira sans difficulté aux plaisirs mathématiques les plus raffinés. Vous retrouverez, tout au long de l'ouvrage, les applications spectaculaires de ces notions quelquefois abstraites.

13/2.1

Langage des ensembles

I. Vocabulaire de la logique

Le langage mathématique utilise simultanément le langage courant et des signes mathématiques. Il comprend des termes qui dans un assemblage cohérent forme un énoncé.

En mathématique, on utilise des énoncés que l'on ne démontre pas et appelés AXIOMES.

A partir de ces axiomes, on démontre après raisonnement, d'autres énoncés appelés THEOREMES.

Signes usuels de logique

• Le signe de négation

A tout énoncé P, on peut associer un nouvel énoncé appelé négation de P, noté non P, ou $\neg P$

Si l'énoncé P est vrai alors non P est faux.

Si l'énoncé P est faux alors non P est vrai.

• Le signe de disjonction noté V

Si P et Q sont 2 énoncés, l'assemblage (PVQ) est un énoncé. L'énoncé (PVQ) est vrai si P est vrai ou Q est vrai, ou les deux.

• Le signe de conjonction noté Λ

Si P et Q sont 2 énoncés, l'assemblage ($P \Lambda Q$) est un énoncé. L'énoncé ($P \Lambda Q$) est vrai si P est vrai et Q est vrai.

Tableau récapitulatif (table de vérité)
(V : vrai et F : faux)

P	Q	PVQ	$P \Lambda Q$
V	V	V	V
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	F

- Le signe d'implication $\Longrightarrow$

Si (P implique Q) est vrai et que P est vrai alors Q est nécessairement vrai.

- Le signe d'équivalence $\Longleftrightarrow$

($P \Longleftrightarrow Q$) se lit « la proposition P est équivalente à la proposition Q »

Exemple :

Le nombre entier n est divisible par 2 $\Longleftrightarrow$ n est pair.

Ensembles et éléments

La notion d'ensemble est évoquée dans le langage courant par des termes : collection, groupement, etc.

Soit E un ensemble et a un objet.

Si l'énoncé « a est élément de E » est vrai on écrit $a \in E$
Si '' '' est faux on écrit $a \notin E$

Soit E un ensemble dont les éléments sont 1, 2, 3, 4.
On notera $E = \{1,2,3,4\}$

Deux ensembles sont égaux si ils ont les mêmes éléments.

Un ensemble ne contenant pas d'élément se nomme ensemble vide et se note ϕ ou $\{\}$

Les quantificateurs

- Le quantificateur d'existence $\exists$

($\exists a \in E$) P se lit : il existe au moins un élément a tel que la proposition P soit vérifiée.

- Le quantificateur universel $\forall$

($\forall a \in E$) se lit : Quel que soit l'élément a de E, la proposition P est vérifiée.

II. Ensemble et parties d'un ensemble

Sous-ensembles ou parties

« $A \subset E$ » $\Longleftrightarrow$ ($\forall a \in A$) $a \in E$ se lit :

« A est un sous-ensemble de E si et seulement si quel que soit l'élément x de A, cet élément x appartient aussi à E. »

$$(A \subset B \text{ et } B \subset A) \Longleftrightarrow A = B$$

Ensemble des parties d'un ensemble P(E)

Soit $E = \{a,b,c\}$

On note $P(E) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, E\}$

Complémentaire d'une partie d'un ensemble E

On note $C(E)A = \{a \mid a \in E \text{ et } a \notin A\}$

Intersection ($\cap$)

Soit E et $A \subset E$ et $B \subset E$

on écrit $A \cap B = \{ a \in E \ / \ a \in A \text{ et } a \in B \}$

Union ($\cup$)

Soit E et $A \subset E$ et $B \subset E$

on écrit $A \cup B = \{ a \in E \ / \ a \in A \text{ ou } a \in B \}$

Propriétés

Soit E un ensemble et P(E) les parties de E

Soit $A \subset E$ et $B \subset E$

— l'intersection et la réunion sont 2 lois de composition interne dans E, c.a.d. :

$A \in P(E)$ et $B \in P(E)$ $A \cap B \in P(E)$
$A \cup B \in P(E)$

— $\cap$ et $\cup$ sont commutatives et associatives.

commutativité

$A \cap B = B \cap A$ et $A \cup B = B \cup A$

associativité

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

— E est l'élément neutre pour $\cap$
$A \cap E = A$

ϕ est l'élément neutre pour U
$A \cup \phi = A$

— $\cap$ est distributive par rapport à
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

III. Produit cartésien. Relation. Fonction

Produit cartésien

Soit A et B deux ensembles, on appelle produit cartésien de A par B l'ensemble de tous les couples {x,y} où $x \in A$ et $y \in B$, et on note $A \times B = \{ (x,y) \ / \ x \in A \text{ et } y \in B \}$

Relation

La donnée de 2 ensembles A et B et d'une partie de A x B définit une relation.

Exemple : A = { 2,4,6,8 }
B = { 1,2,3 }

L'ensemble G de AxB / G = { (2,1), (4,2) (6,3) } définit la relation « x est le double de y » x ∈ A et y ∈ B,
on écrit x $\mathscr{R}$ y.

Propriétés de la relation

• Réflexivité

Une relation $\mathscr{R}$ dans E est réflexive si x $\mathscr{R}$ x.

Exemple : la relation « x est le fils de y » n'est pas réflexive car x ne peut pas être le fils de lui-même.

• Symétrie

Une relation est dite symétrique si et seulement si pour tout couple (x,y) de A X B

x $\mathscr{R}$ y => y $\mathscr{R}$ x

Exemple : dans l'ensemble des droites
si D1//D2 alors D2//D1

La relation « est parallèle à » est symétrique.

• Antisymétrie

Une relation $\mathscr{R}$ est antisymétrique si x est en relation avec y et que y n'est pas en relation avec x
x $\mathscr{R}$ y et que y $\mathscr{R}$ x

• Transitivité

Une relation est transitive si et seulement si V (x,y,z) de E (x $\mathscr{R}$ y) et (y $\mathscr{R}$ z) => x $\mathscr{R}$ z

Exemple : la relation « est plus petit que » est transitive.

Relation d'équivalence

Définition : $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence si elle est :

— réflexive

— symétrique

— transitive

Définition : on appelle classe d'équivalence d'un élément a ∈ E, le sous-ensemble de tous les éléments de E équivalents à a.

Définition : on appelle partition d'un ensemble E tout sous-ensemble non vide de E.

Relation d'ordre

Définition : $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre si elle est :

— réflexive

— antisymétrique

— transitive

Relation d'ordre total

Une relation d'ordre est totale si
x $\mathscr{R}$ y ou y $\mathscr{R}$ x

Relation d'ordre partiel

Une relation est d'ordre partiel si il existe (x,y) $\in$ E X E / **n** $\mathscr{R}$ y et y$\mathscr{R}$ x

Fonction

Soit 2 ensembles E et F.

Une relation $\mathscr{R}$ de E vers F est une fonction si tout élément de E est en relation avec au plus un élément de F.

Application

Une relation E est une application de E vers F si et seulement si tout élément de E est en relation avec un élément et UN SEUL de F.
($\forall$ x $\in$ E, $\exists$! y $\in$ F / x $\mathscr{R}$ y)

Bijection

Une application dont tout élément de F est l'image d'un seul élément de E est appelée bijection.

Une application bijective $\Longleftrightarrow$ ($\forall$ y $\in$ F, $\exists$! x $\in$ E / y $\mathscr{R}$ x)

13/2.1.1

Ensembles des nombres

ENSEMBLE DES NOMBRES ENTIERS RELATIFS ($\mathbb{Z}$)

L'ensemble $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers positifs et négatifs. On peut l'écrire ainsi :

$\mathbb{Z} = \{ \ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots \}$

On remarquera que N l'ensemble des entiers naturels est un sous-ensemble de $\mathbb{Z}$.

Remarque :

Soit $a \in \mathbb{Z}$, $|a|$ se lit valeur absolue de a, si $a > 0$ alors $|a| = a$ et si $a < 0$ alors $|a| = -a$. Prenons $a = -7$, $|-7| = -(-7) = 7$ et si $a = 5$ $|5| = 5$. Nous constatons que la valeur absolue d'un nombre quelconque est toujours positive.

• Définition et propriétés de l'addition dans $\mathbb{Z}$

La somme de 2 entiers relatifs de même signe est le relatif qui a pour valeur absolue la somme des valeurs absolues et pour signe le signe commun. La somme de 2 entiers relatifs de signes contraires est le relatif qui a pour valeur absolue la différence des 2 valeurs absolues et pour signe le signe de celui qui a la plus grande valeur absolue.

Exemple : $(+14) + (+5) = (+19)$; $(+7) + (-11) = (-4)$

Propriétés	Formulation pour a, b, c $\in \mathbb{Z}$
Commutativité	$a + b = b + a$
Associativité	$(a+b) + c = a + (b+c)$
0 est l'elt. neutre	$a + 0 = 0 + a = a$
$-a$ est l'opposé de a	$a + (-a) = (-a) + a = 0$

• Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $x + b = a$

Si $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$ on cherche si il existe $x \in \mathbb{Z} \,/\, x+b=a$. Pour cela on va se servir des propriétés ci-dessus.

$[(x+b)+(-b)=a+(-b)] \Leftrightarrow [x+(b+(-b))=a+(-b)] \Leftrightarrow [x=a+(-b)]$

x sera donc égal à la différence $a-b$.

• Définition et propriétés de la multiplication dans $\mathbb{Z}$

Le produit de 2 relatifs a et b est le relatif dont le signe est positif si a et b sont de même signe, négatif si a et b sont de signes contraires, et dont la valeur absolue est le produit des valeurs absolues de a et b.

Propriétés	Formulation pour a, b, c∈$\mathbb{Z}$
Commutativité	a * b = b * a
Associativité	(a*b) * c = a * (b*c)
1 est l'elt. neutre	a * 1 = 1 * a = a
Multiplication par 0	a * 0 = 0 * a = 0

ENSEMBLE DES NOMBRES DECIMAUX (ID)

• Ensemble des puissances de dix

Si p est un entier relatif, différent de zéro, on appelle puissance P[ième] de 10 et on note 10^p le nombre positif tel que :

si p>0   10^p = 10*10*10*... = 10000...0 (p zéros)

si p<0   10^p = 1/(10^p) = 1/10000...0 = 0,0000...1 (p zéros en tenant compte de celui devant la virgule).

Propriétés :

Soient n∈IN et p∈IN et a∈$\mathbb{Z}$ et b∈$\mathbb{Z}$

1) 10^0 = 1

2) 10^(−n) = 1/10^n

3) 10^(n+p) = (10^n)*(10^p)

4) (10^n)^p) = 10^(n*p)

5) a*10^n + b*10^n = (a+b)*10^n

6) 10^n/10^p = 10^(n−p)

• Nombres décimaux. Définition

L'ensemble ID des nombres décimaux est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme : a*(10^n) avec a∈$\mathbb{Z}$ et n∈$\mathbb{Z}$.

Exemple :

0,015 = 15 *0,001 = 15 * 10^(−3)

ENSEMBLE DES NOMBRES REELS (IR)

Soit l'équation 11*x = 28. Si x appartenait à $\mathbb{Z}$ alors la division de 28 par 11 n'aurait pas de reste. Ce n'est pas le cas 28 = 11*2 + 6. Il n'existe pas non plus de décimal vérifiant cette équation. 28/11 sera appelé un nombre rationnel et si l'on fait la division de 28 par 11 on va trouver une suite illimitée périodique de chiffres soit 2, 54545454545...

Définition : Les nombres rationnels sont représentés par des développements décimaux illimités périodiques.

Propriétés

Les propriétés dans $\mathbb{R}$ sont les mêmes que dans $\mathbb{Z}$ avec en plus pour la multiplication la propriété suivante : si $a \in \mathbb{R}$ alors il existe le réel 1/a tel que a*(1/a) = 1 (avec a différent de 0) et aussi la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition : a*(b+c) = a*b + a*c. Les propriétés sur les puissances de 10 restent valables dans $\mathbb{R}$ et tout réel a mis à une puissance quelconque suit aussi ces propriétés.

Exemple :

(3^2)*(3^4) = 3^(2+4) = 3^6

Opérations dans $\mathbb{R}$: Racine carrée d'un réel positif. On appelle racine carrée d'un nombre réel positif x, le réel a tel que a*a = x soit a^2 = x et on note $\sqrt{x} = a$.

Propriétés : $\sqrt{(x*y)} = \sqrt{x}*\sqrt{y}$ et $\sqrt{(x/y)} = \sqrt{x}/\sqrt{y}$.

Nous pouvons conclure en écrivant que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{R}$ qui signifie $\mathbb{N}$ inclus dans $\mathbb{Z}$, qui est inclus dans $\mathbb{D}$ qui est inclus dans $\mathbb{R}$.

13/2.1.2

Notions de numération

NUMÉRATION DÉCIMALE

Considérons le nombre entier 3874. Il peut s'écrire sous la forme : $3 * 10^3 + 8 * 10^2 + 7 * 10^1 + 4 * 10^0$ ainsi tout nombre pourra se décomposer suivant les puissances de DIX. On appellera BASE 10 l'ensemble des puissances de 10, et tout nombre s'écrira dans cette base en utilisant dix chiffres (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9).

NUMÉRATION BINAIRE

- Définition

Dans la numération binaire la base est l'ensemble des puissances de 2. (2^n, ..., 2^4, 2^3, 2^2, 2^1, 2^0). Tout nombre s'écrira en BASE 2 en utilisant 2 chiffres 0 et 1. Ces 2 chiffres sont appelés BITS (BInary digiTS). Dans les circuits électroniques d'un micro-ordinateur, soit le courant passe et c'est l'état 1 soit le courant ne passe pas et c'est l'état 0. D'où l'utilité de représenter tout nombre en base 2.

Exemple : soit le nombre entier 15 :

$$15 = 1 * 8 + 1 * 4 + 1 * 2 + 1 * 1$$
$$= 1 * 2^3 + 1 * 2^2 + 1 * 2^1 + 1 * 2^0$$

En binaire 15 s'écrira 1111.

Tableau de correspondance décimal-binaire

binaire	0	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010
décimal	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Exercice d'application : Ecriture dans le système binaire d'un nombre écrit en décimal.

Pour écrire un nombre décimal en binaire, on effectue des divisions successives par 2 jusqu'au moment où l'on obtient un quotient nul. Les restes des divisions représentent l'écriture binaire du nombre.

Exemple : $13 = 2 * 6 + 1$; $6 = 2 * 3 + 0$; $3 = 2 * 1 + 1$; $1 = 2 * 0 + 1$ les restes des divisions représentent 13 en binaire soit 1101.

- Opérations en base binaire

— Addition

Soit à additionner dans le système binaire les nombres 13 et 5 qui s'écrivent respectivement 1101 et 101. Il faut savoir tout d'abord que (0 + 0 = 0, 0 + 1 = 1, 1 + 0 = 1, 1 + 1 = 10). On remarquera que l'addition correspond à la fonction logique OU (U). Donc lorsque nous aurons 1 + 1 nous poserons 0 et nous retiendrons 1.

Reprenons l'exemple :

```
    1 1  (retenues)
    1101
 +   101
 -------
   10010 On vérifiera que 10010 = 18
```

— Multiplication

Il faut savoir tout d'abord que 0*0 = 0, 0*1 = 0, 1*0 = 0 et que 1*1 = 1. On remarquera que la multiplication correspond à la fonction logique ET.

Reprenons l'exemple : soit 13*5 = 65 en décimal.

En binaire nous aurons :

```
     1101
 *    101
 --------
     1101
     000.
   1101..
 --------
  1000001 ce qui est bien l'écriture de 65 en binaire.
```

SYSTÈME DE BASE 16 OU HEXADÉCIMAL

- Définitions

La base 16 sera donc l'ensemble des puissances de 16, et tout nombre s'écrira en utilisant seize symboles : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F. La correspondance avec le système décimal sera : A = 10, B = 11, C = 12, D = 13, E = 14 et F = 15. Soit le nombre E5A en hexadécimal. Déterminons son écriture dans le système décimal.

```
E5A = 14*(16^2) + 5*(16^1) + 10*(16^0)
    = 3584        + 80       + 10
    = 3674
```

- Exercice d'application

Ecriture dans le système décimal d'un nombre écrit en base 16. On procède de la même manière qu'avec un nombre binaire mais cette fois-ci en effectuant des divisions successives par 16. Les restes des divisions constituant l'écriture hexadécimale du nombre. Soit l'exemple : 4325.

4325 = 270*16 + 5 ; 270 = 16*16 + 14 ; 16 = 1*16 + 0 ; 1 = 16*0 + 1 donc l'écriture héxadécimale de 4325 sera 10E5.

Remarque :

Dans un ordinateur les calculs sont traités en système binaire. Les bits sont groupés par OCTETS (groupe de 8). Il est utile de représenter un octet en héxadécimal car le format est alors de deux chiffres variant de 00 à FF..

Tableau de correspondance héxadécimal-binaire

binaire	0	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001
HEXA	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

binaire	1010	1011	1100	1101	1110	1111
HEXA	A	B	C	D	E	F

Exemple : Soit l'octet 1100 0111 en héxadécimal il s'écrira C7.

AUTRES BASES

Il existe autant de bases que de nombres entiers (base 3, base 4, ... etc.) et tout nombre s'écrit d'une manière et une seule dans chaque base. Pour écrire un nombre décimal dans une de ces bases, on procède de la même manière qu'en binaire ou en héxadécimal.

Le programme dont la liste vous est présentée ci-après effectue pour vous le passage d'une base quelconque à une autre base.

Vous n'aurez, avec celui-ci plus aucune difficulté à transformer un nombre en base 3 en son équivalent en base 7 par exemple.

```
5 REM copyright WEKA 1989
10 MODE 2
20 INK 0,0:INK 1,13
30 PAPER 0
40 BORDER 1
50 DIM chif(20):DIM ires(20):DIM ires$(20)
60 PRINT "PROGRAMME de CHANGEMENT DE BASE"
70 INPUT "entrez le num{ro de la base de d{part : ";nd
80 INPUT "entrez le num{ro de la base d'arriv{e : ";na
90 IF (na>16) OR(nd>16) GOTO 450
100 INPUT "entrez le nombre ecrit dans la base de d{part : ";no$
110 n=LEN(no$)
120 FOR i=1 TO n
130 chif$ = MID$(no$,i,1)
140 ascii = ASC(chif$)
150 IF ascii>64 AND ascii<71 THEN chif$=STR$(ascii-64+9)
160 chif(i) = VAL(chif$)
170 IF (chif(i) > nd OR chif(i)=nd) GOTO 450
```

```
180 NEXT i
190 REM Ecriture du nombre en base 10
200 a =0
210 FOR i=1 TO n
220 a = a + chif(i)*nd^(n-i)
230 NEXT i
240 REM Ecriture du nombre dans la base d'arriv{e
245 REM Methode des divisions succ{ssives
250 i=0
260 b = a
270 i=i+1
280 quo = b/na
290 iquo = INT(quo)
300 ires(i) = b - iquo*na
310 k=i
320 b = iquo
330 IF iquo = 0 GOTO 350
340 GOTO 270
350 a$=""
360 FOR i = 1 TO k
370 ires$(i)=STR$(ires(k-i+1))
380 t=ires(k-i+1)
390 IF t > 9 THEN  ires$(i) = CHR$(t-9+64)
400 a$ = a$ + ires$(i)
410 NEXT i
420 PRINT"Le nombre en base";nd;":";no$
430 PRINT"s'{crira en base ";na;":";a$
440 END
450 PRINT "erreur d'entr{e"
460 END
```

13/2.2

Notions générales de géométrie

Tout d'abord, nous distinguerons deux sortes de géométries. La première nous décrira les formes géométriques, les notions d'angles, etc. La deuxième est celle où l'on placera les figures dans un repère donné.

I. Géométrie élémentaire

QUELQUES DÉFINITIONS

• Le point

Prenez un cube, on peut considérer que les sommets du cube sont des points. C'est là l'idée physique du point. La représentation du point sera la trace du crayon sur une feuille. On le notera avec une lettre majuscule A ou B ou C.

• Le plan

Nous pouvons nous représenter un plan en prenant par exemple une surface de tableau, une planche à dessin, etc.

Nous noterons le plan P.

• La droite

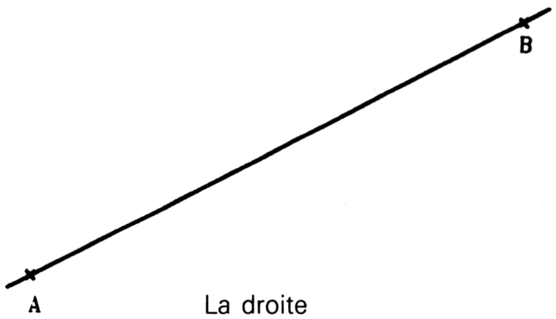
Si nous prenons un plan et 2 points A et B de ce plan, la ligne la plus courte pour rejoindre A à B sera appelée segment de droite.

En la prolongeant de part et d'autre de A et B nous obtenons une droite.

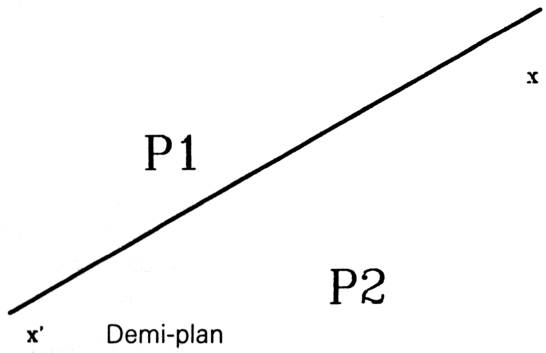
Par 2 points passe une seule droite.

- Demi-plan

Toute droite du plan détermine 2 parties de ce plan appelées demi-plans associés à cette droite.



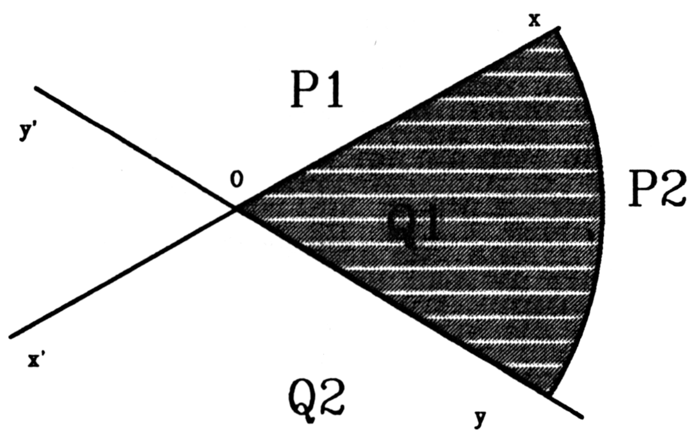
La droite



Demi-plan

- Secteur angulaire

Reprenons la droite x'x et les plans P1 et P2, prenons un point O de cette droite et faisons passer une autre droite y'y qui définit donc 2 autres demi-plans Q1 et Q2.



La partie hachurée est l'intersection de P2 avec Q1 (P2 Q1).

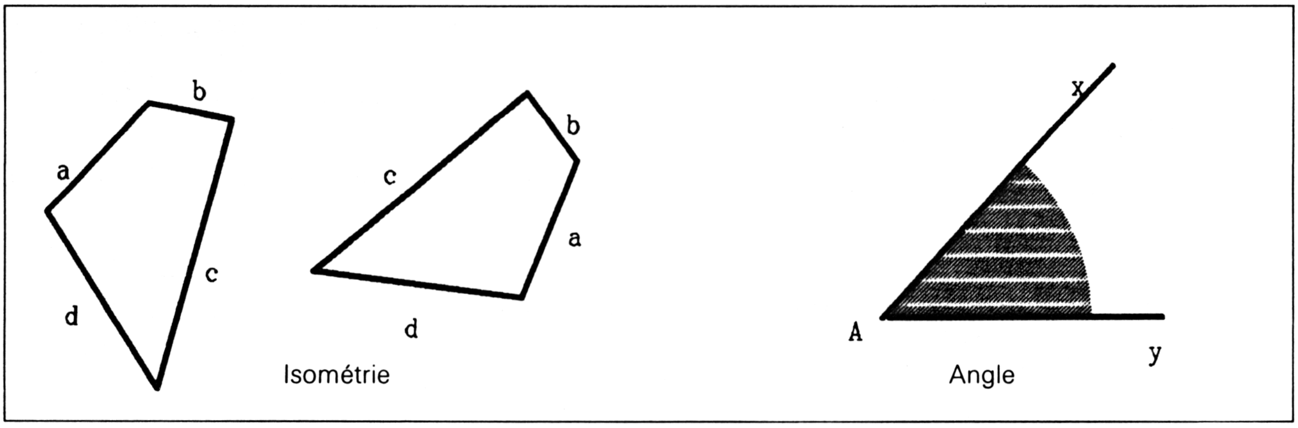
Nous l'appellerons secteur angulaire.

- Isométrie

Deux figures sont dites isométriques si elles sont superposables. Cette superposition s'obtenant soit par glissement, soit par retournement du plan.

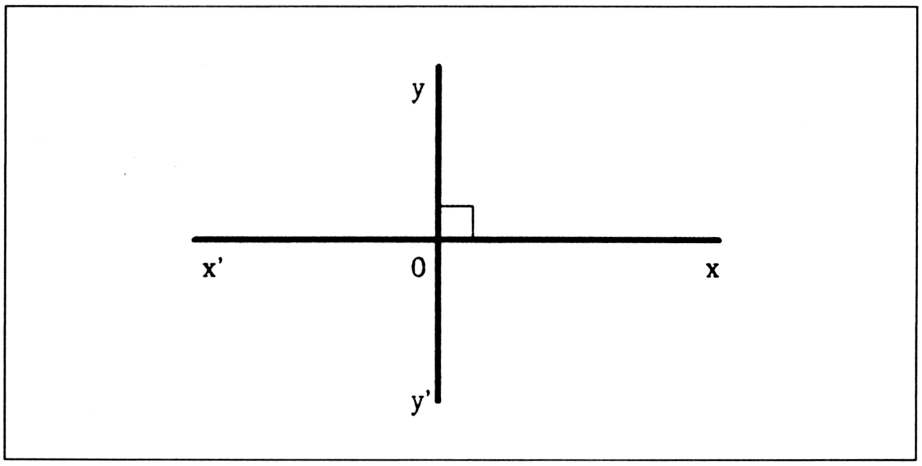
- Angle

Soit un secteur angulaire [Ax,Ay], l'angle noté $\widehat{xAy}$ est l'ensemble des secteurs angulaires isométriques au secteur angulaire [Ax,Ay].



- Angle droit

Prenons une droite x'x et une autre droite y'y de telle manière que les 4 secteurs angulaires soient isométriques entre eux. L'angle xOy définit sera appelé ANGLE DROIT et l'angle x'Ox angle plat.



- Unité d'angle

On utilise 3 unités d'angle : le degré, le grade et le radian, ce dernier sera défini un peu plus loin.

Il faudra retenir qu'un angle plat vaut 180° (degrés) ou 200 gd (grades) et qu'un angle droit vaut 90° ou 100 gd. 2 droites sont dites perpendiculaires si leur angle est 90°.

- Triangle

La somme des trois angles vaut 180°.

Le triangle rectangle a un angle droit.

Théorème de pythagore : la somme des carrés des côtés est égal au carré de l'hypothénuse
$AB^2 + BC^2 = AC^2$

Le triangle isocèle est un triangle rectangle et dont les 2 autres valent 45° chacun.

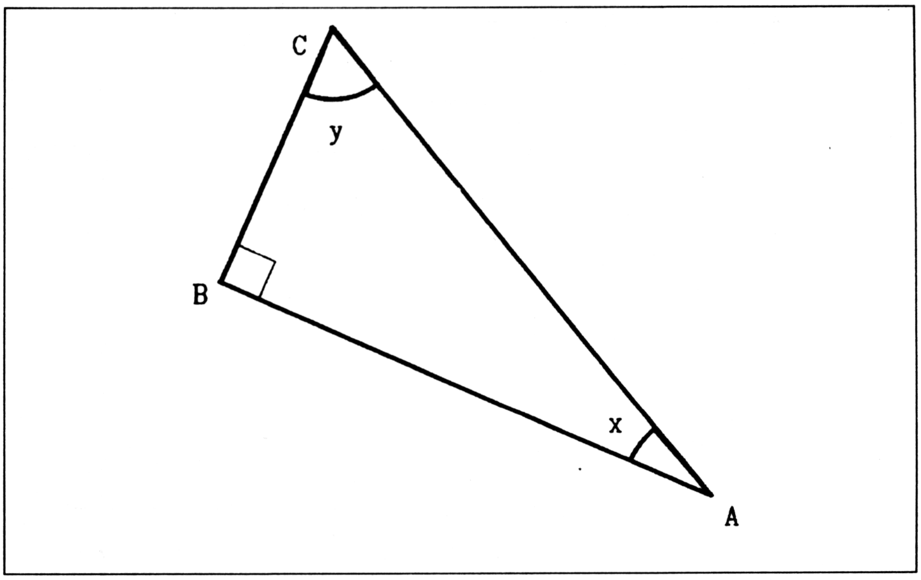
Le triangle équilatéral à 3 angles égaux entre eux et valant 60°.

- Bissectrice d'un angle

La bissectrice d'un angle est une droite séparant celui-ci en 2 autres angles égaux.

RELATION DANS UN TRIANGLE RECTANGLE

Soit x l'un des 2 angles aigus.



On appelle cosinus de l'angle x

le rapport $\frac{AB}{AC} = \frac{\text{mesure du côté adjacent à l'angle}}{\text{mesure de l'hypothénuse}} = \cos(x)$

On appelle sinus de l'angle x

le rapport $\frac{BC}{AC} = \frac{\text{mesure du côté opposé à l'angle}}{\text{mesure de l'hypothénuse}} = \sin(x)$

On remarquera que le cosinus et le sinus sont toujours inférieurs à 1

On appelle tangente de l'angle x

le rapport $\dfrac{BC}{AB} = \dfrac{\text{mesure du côté opposé à l'angle}}{\text{mesure du côté adjacent à l'angle}} = tg(x)$

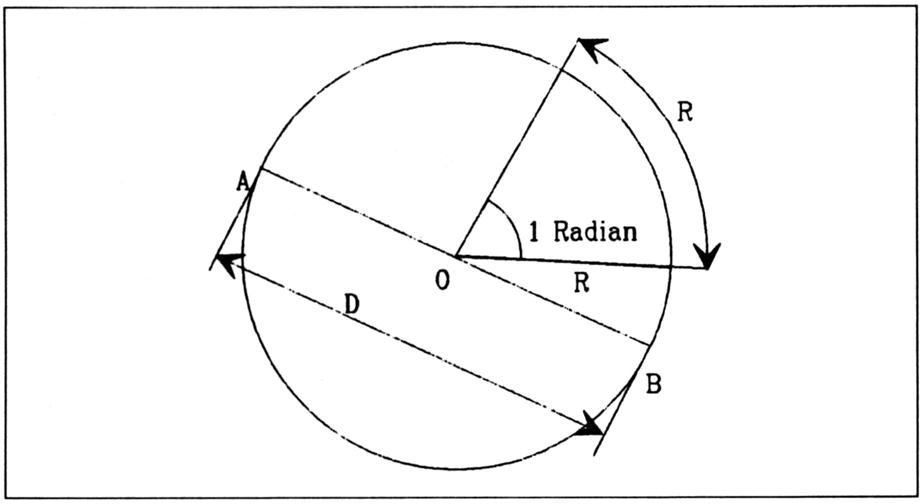
On remarque que tg(x) = sin(x) / cos(x)

On appelle cotangente de l'angle x le rapport AB/BC

On remarque que cotg(x) = 1/tg(x) = cos(x)/sin(x)

LE CERCLE

Le cercle est une ligne plate courbe fermée. Tous ses points sont à une même distance d'un point fixe appelé centre. Cette distance est appelée RAYON R du cercle. Une droite passant par 0 coupe le cercle en 2 points diamétralement opposés. La mesure de la longueur AB est appelée diamètre (D = 2R)



Le Radian est une unité de mesure d'angle équivalent à l'angle qui ayant un sommet en 0, intercepte sur la circonférence un arc de longueur égale au rayon.

La circonférence du cercle est égale à $2*\pi*R$

Le nombre PI (π) est un nombre irrationnel valant environ 3,141592654... L'explication de la mesure de PI ne fera pas l'objet de ce chapitre.

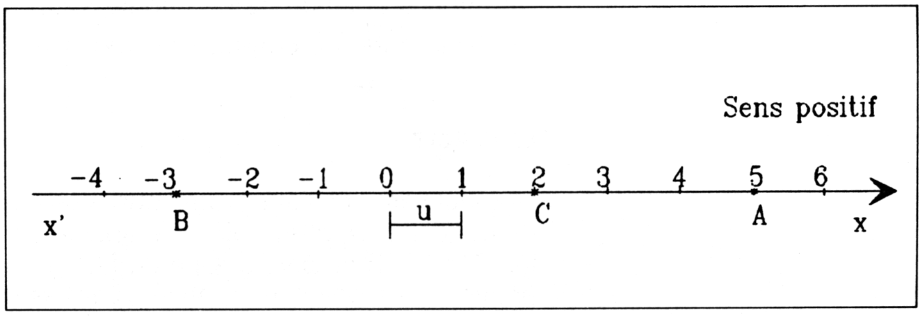
Equivalence degré, grade, radian

degré(°)	0	45	90	180	270	360
grade(gd)	0	50	100	200	300	400
radian(rd)	0	$\pi/4$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π

II. Géométrie affine et vectorielle

- Repère des points d'une droite

Soit une droite D et un point origine O. Nous allons pouvoir la graduer arbitrairement de manière à repérer n'importe quel point A par rapport à O. Nous reporterons consécutivement un segment de droite u de longueur unité et en les numérotant.



Chacun des nombres est appelé abscisse du point correspondant

Exemple :

A a pour abscisse 4. On notera $\overline{OA} = 4$

B a pour abscisse -3. On notera $\overline{OB} = -3$

- Relation de CHASLES

1 : $\overline{OA} = -\overline{AO}$ 2 : $\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB}$ 3 : $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$

Exemple :

Prenons les points A,B,C de la figure

$$\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB} = -5-3 = -8$$

$$\overline{BC} = \overline{BO} + \overline{OC} = 3+2 = 5$$

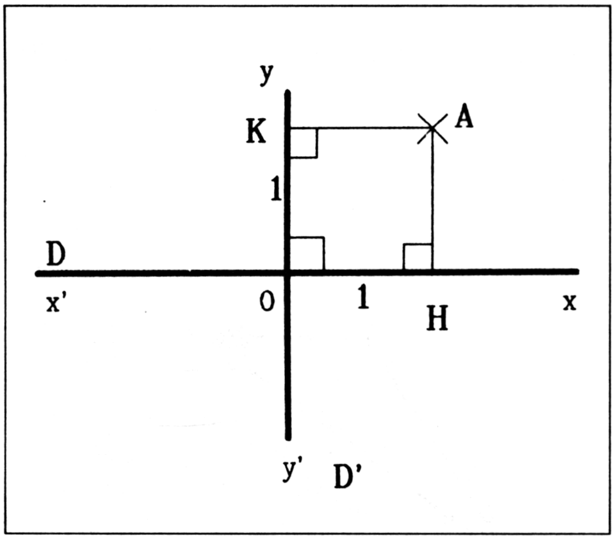
donc $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = -8+5 = -3$

- Distance

Alors que la mesure algébrique de 2 points peut avoir le signe (−) ou (+) suivant le sens positif que l'on s'est donné, la distance, elle, représente la mesure de la longueur AB. Elle est toujours POSITIVE.

• Repère cartésien du plan

Soit un plan P, construisons dans ce plan 2 droites D et D' orthogonales entre elles, de même origine O et graduons-les. On obtient un repère du plan et tous les points de ce plan vont pouvoir être repérés.



$\overline{OH}$ est la projection orthogonale de A sur D parallèlement à D'.

$\overline{OK}$ est la projection orthogonale de A sur D' parallèlement à D.

$\overline{OH}$ représente l'abscisse du point A

$\overline{OK}$ représente l'ordonnée du point A

Le couple $(\overline{OH},\overline{OK})$ est appelé coordonnées du point A.

Note :

Si l'unité choisie est la même sur les 2 droites, le repère est dit ORTHONORMÉ

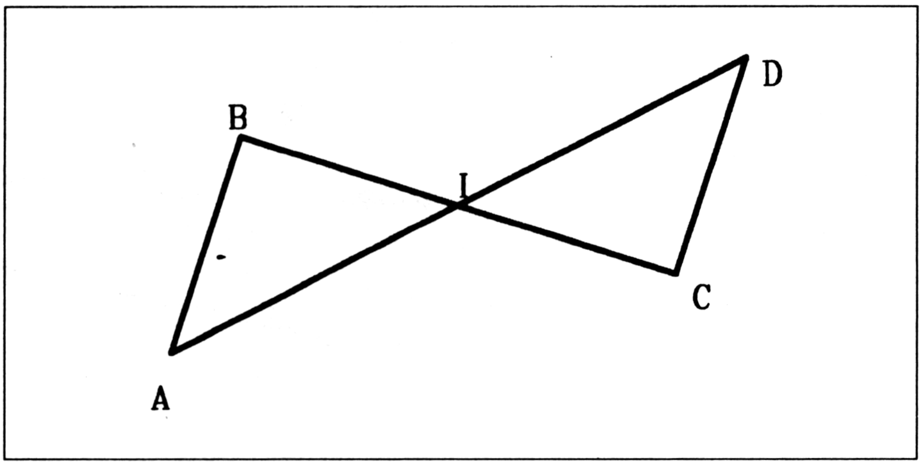
NOTIONS SUR LES VECTEURS

• Bipoints

On appelle bipoint du plan tout couple de points, on note (A,B). A est appelé origine et B extrémité. Ils délimitent un segment de droite [A,B].

• Bipoints équipollents

Le bipoint (A,B) est équipollent au bipoint (C,D) si et seulement si les segments [A,D] et [B,C] ont même milieu I.



ABCD détermine alors un parallélogramme.

On note (A,B) ~ (C,D), signifie (A,B) équipollent à (C,D)

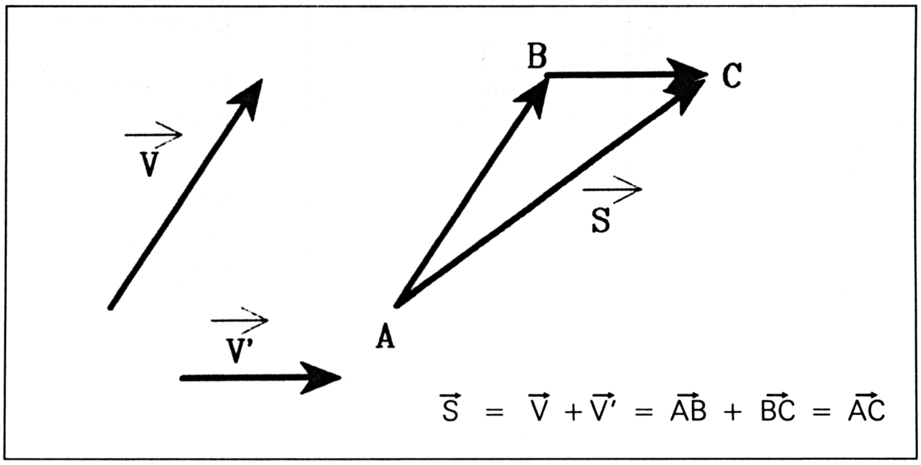
• Vecteurs

Soit un bipoint (A,B). On appelle vecteur noté $\vec{V}$, l'ensemble de tous les bipoints équipollents à (A,B)

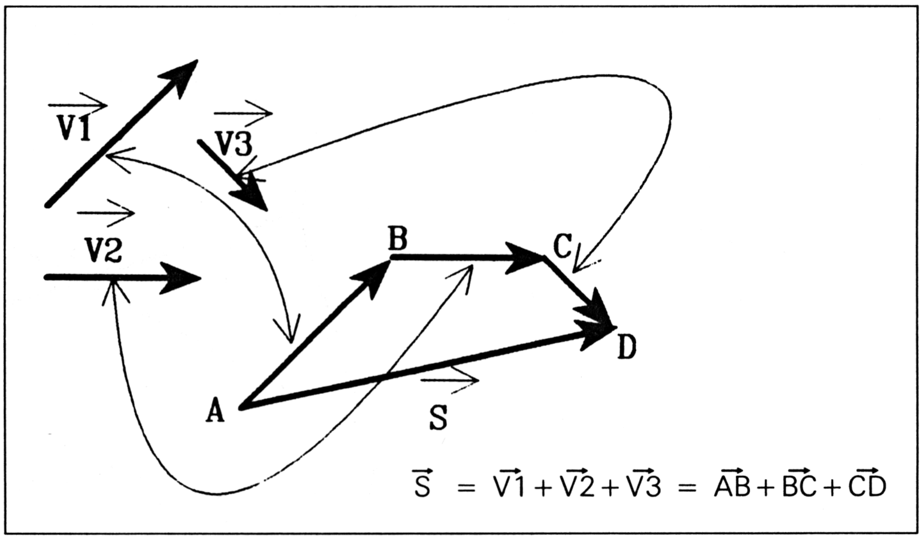
On distingue le sens de A vers B, la NORME c'est-à-dire la distance entre A et B et sa direction.

• Somme de 2 vecteurs

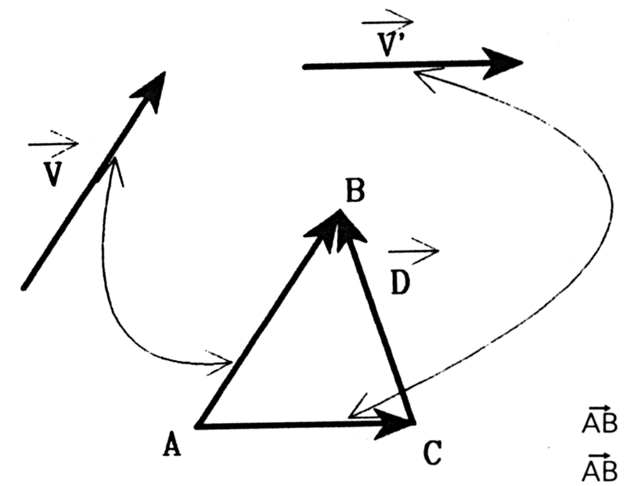
Soit 2 vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{V'}$. Pour faire la somme nous allons construire 2 bipoints équipollents à $\vec{V}$ et $\vec{V'}$ et les mettre bout à bout.



• Somme de plusieurs vecteurs



- Différence de 2 vecteurs



$\vec{AB} \sim \vec{V}$ et $\vec{AC} \sim \vec{V'}$

$\vec{AB} - \vec{AC} = -\vec{BA} - \vec{AC} = -(\vec{BA} + \vec{AC}) = -\vec{BC} = \vec{CB}$

- Multiplication d'un vecteur par un nombre réel a

Soit un vecteur $\vec{V}$ et un nombre réel a

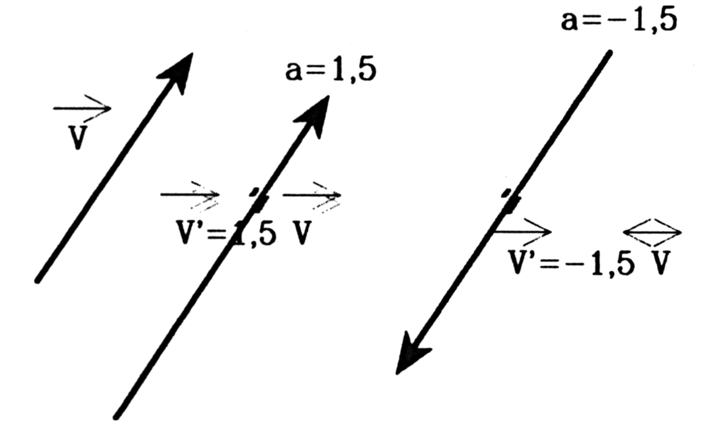
Le vecteur V' = a $*$ $\vec{V}$ aura :

— la même direction que $\vec{V}$

— le même sens que $\vec{V}$ si $a > 0$

— le sens inverse si $a < 0$

— la norme = a $*$ $\|\vec{V}\|$



2 vecteurs sont dits colinéaires s'ils ont la même direction (s'ils sont portés par 2 droites parallèles ou confondues).

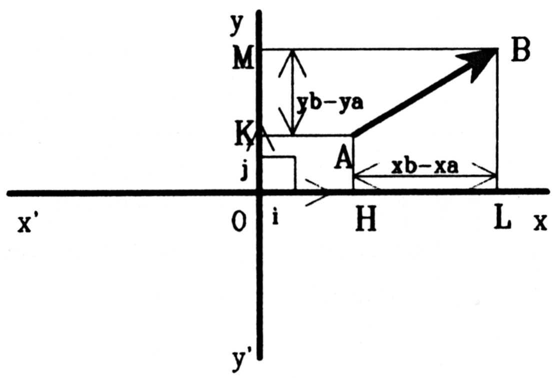
GÉOMÉTRIE VECTORIELLE

Soit un plan affine P. A ce plan nous pouvons associer un plan vectoriel $\vec{P}$ tel qu'au segment [0,1] de x on associe le vecteur $\vec{i}$, d'origine 0 et d'extrémité 1, de direction l'axe des x, de sens 0 vers x et de norme = 1 et au segment [0,1] de y le vecteur $\vec{j}$.

$(0, \vec{i}, \vec{j})$ est appelé repère du plan affine P

$(\vec{i}, \vec{j})$ est appelée base du plan vectorial $\vec{P}$

• Coordonnées d'un vecteur dans une base $(\vec{i}, \vec{j})$
Soit 2 points A(xa,ya) et B(xb,yb)



$\vec{OH} = xa * \vec{i}$

$\vec{OL} = xb * \vec{i}$

$\vec{OK} = ya * \vec{j}$

$\vec{OM} = yb * \vec{j}$

$\vec{OA} = \vec{OH} + \vec{OK} = xa * \vec{i} + ya * \vec{j}$

$\vec{OB} = \vec{OL} + \vec{OM} = xb * \vec{i} + yb * \vec{j}$

$\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (xb * \vec{i} + yb * \vec{j}) - (xa * \vec{i} + ya * \vec{j})$

Pou~~r~~ additionner plusieurs vecteurs, on additionne leurs abscisses et on additionne leurs ordonnées.

$\vec{AB} = (xb - xa) * \vec{i} + (yb - ya) * \vec{j}$

• Multiplication d'un vecteur par un réel K

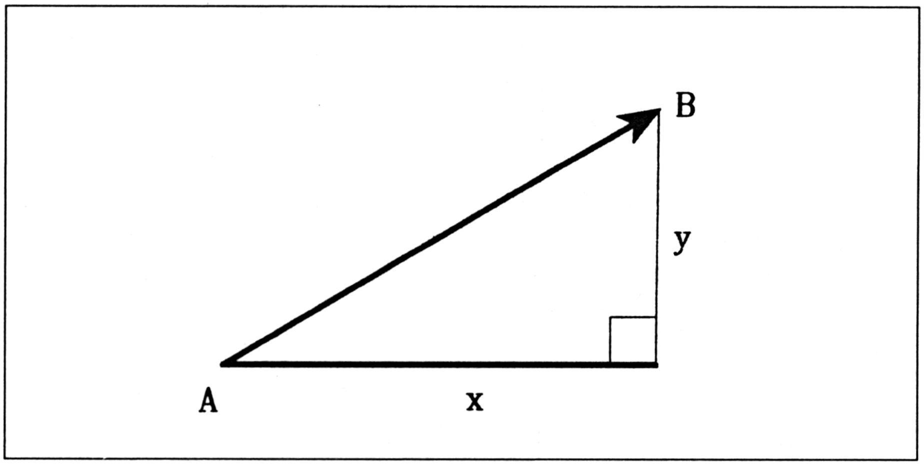
soit $\vec{V} = x * \vec{i} + y * \vec{j}$ soit $k \in \mathbb{R}$

$\vec{V'} = k * \vec{V} = k(xi + y\vec{j}) = kx * \vec{i} + ky * j$

• Norme d'un vecteur $\vec{AB}(x,y)$

La norme d'un vecteur $\vec{AB}$ est la mesure de la longueur du segment [A,B]. Ce segment représente l'hypothénuse d'un triangle rectangle. Donc la norme sera égale à la racine des carrés des coordonnées.

On note $\|\vec{AB}\| = \sqrt{(x^2 + y^2)}$



- Equation d'une droite

Soit A un point du plan P de coordonnées (xa,ya).

Soit le vecteur $\vec{V}$ de coordonnées (a,b)

La droite définie par le point A et le vecteur $\vec{V}$ est l'ensemble des points M(x,y) tels que $\vec{AM}$ et $\vec{V}$ soient colinéaires.

$\vec{AM}$ est colinéaire à $\vec{V} \Longleftrightarrow k \in \mathbb{R},\ \vec{AM} = k.\vec{V}$

$\vec{AM} = (x - xa, y - ya)$ et $\vec{V} = (a,b)$

on écrit : $x - xa = k.a$ ces équations sont appelées
$y - ya = k.b$ équations paramétriques

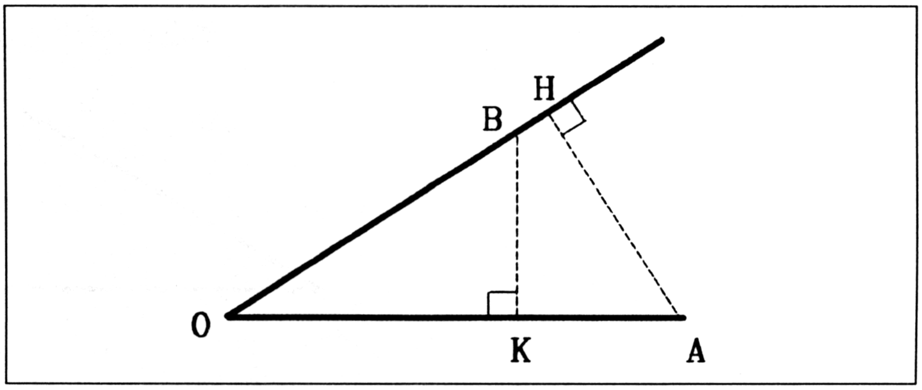
De ces 2 équations on peut sortir k et écrire :

$k = (x - xa)/a = (y - ya)/b \Longleftrightarrow (x - xa).b = (y - ya).a$

On obtient $\boxed{(x - xa).a - (y - ya).b = 0}$ qui est appelée équation cartésienne

• Produit scalaire de 2 vecteurs

Soit $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs du plan, $\vec{OA}$ un représentant de $\vec{U}$ et $\vec{OB}$ un représentant de $\vec{V}$



On a $\vec{OK}.\vec{OA} = \vec{OB}.\vec{OH}$, et OK.OA est appelé PRODUIT SCALAIRE et on note $\vec{OA}.\vec{OB} = \vec{U}.\vec{V}$

Autre définition :

$OA = \|\vec{OA}\|$ et $OK = \|\vec{OB}\|.\cos(\widehat{AOB})$

donc $OA.OK = \|OA\|.\|OB\|.\cos(\widehat{AOB})$

$$\boxed{\vec{U}.\vec{V} = \|\vec{U}\|.\|\vec{V}\|.\cos(\vec{U},\vec{V})}$$

Propriétés du produit scalaire

1) Deux vecteurs sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul.

2) $\vec{U}.\vec{V} = \vec{V}.\vec{U}$

3) $k \in R$, $(k.\vec{U}).\vec{V} = \vec{U}.(k.\vec{V}) = k.(\vec{U}.\vec{V})$

4) Soit $\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}$

$(\vec{U} + \vec{V}).\vec{W} = \vec{U}.\vec{W} + \vec{V}.\vec{W}$

Note : Le produit scalaire est un nombre réel

• Calcul du produit scalaire avec les coordonnés dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

soit $\vec{U} = x.\vec{i} + y.\vec{j}$ et $\vec{V} = x'.\vec{i} + y'.\vec{j}$

$\vec{U}.\vec{V} = (x.\vec{i} + y.\vec{j}) * (x'.\vec{i} + y'.\vec{j})$

$= xx'\,\vec{i}^{\,2} + (x'y + y'x).\vec{i}.\vec{j} + yy'\,\vec{j}^{\,2}$

comme on est dans une base orthonormée :

$\|\vec{i}\| = 1$ donc $\vec{i}^{\,2} = 1$

$\|\vec{j}\| = 1$ donc $\vec{j}^{\,2} = 1$ et $\vec{i}.\vec{j} = 0$

On obtient : $\boxed{\vec{U}.\vec{V} = xx' + yy'}$

13/2.3

Notions générales de trigonométrie

I. Fonctions circulaires

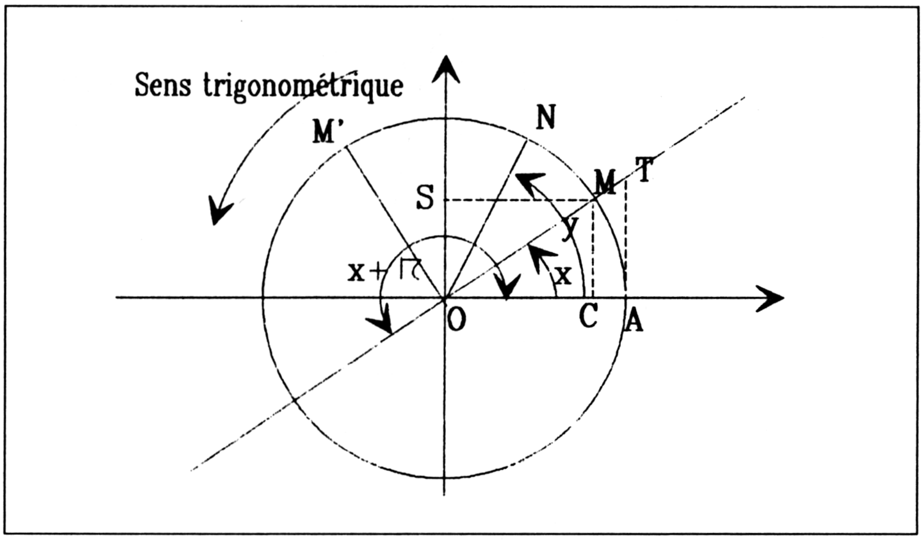
Soit un repère orthonormé $(0, \vec{OA}, \vec{OB})$ et un cercle C centré en O et de rayon égal à l'unité $(R = 1)$

Soit x la mesure de l'angle $(\widehat{\vec{OA}, O, \vec{OB}})$ et le point M(OC,OS) associé à la mesure x.

On appelle fonction COSINUS du nombre réel x, l'abscisse du point M et fonction SINUS du nombre réel x, l'ordonnée du point M.

On note $\cos(x) = \overline{OC}$

$\sin(x) = \overline{OS}$



Le point C est un point du segment [AA'] donc $-1 \leqslant \cos \leqslant 1$

Le point S est un point du segment [BB'] donc $-1 \leqslant \sin \leqslant 1$

Faisons faire un tour au vecteur $\vec{OM}$, soit un angle de 2π, on s'aperçoit que le cosinus reprend les mêmes valeurs ainsi que le sinus.

On écrira $\cos(x) = \cos(x + 2k\pi)$ et $\sin(x) = \sin(x + 2k\pi)$ (k nombre entier relatif, égal au nombre de tours effectués. Si $k > 0$ le sens de rotation est le sens inverse du sens trigonométrique).

On dit alors que les fonctions sinus et cosinus sont des fonctions périodiques et de période 2π.

- Fonction COSINUS

Faisons tourner $\vec{OM}$ dans le sens trigonométrique.

x varie de 0 à $\pi/2$, le point C décrit le segment [AO] donc cos(x) décroît de 1 à 0

x varie de $\pi/2$ à π, le point C décrit [OA'] de O à A' donc cos(x) décroît de 0 à -1.

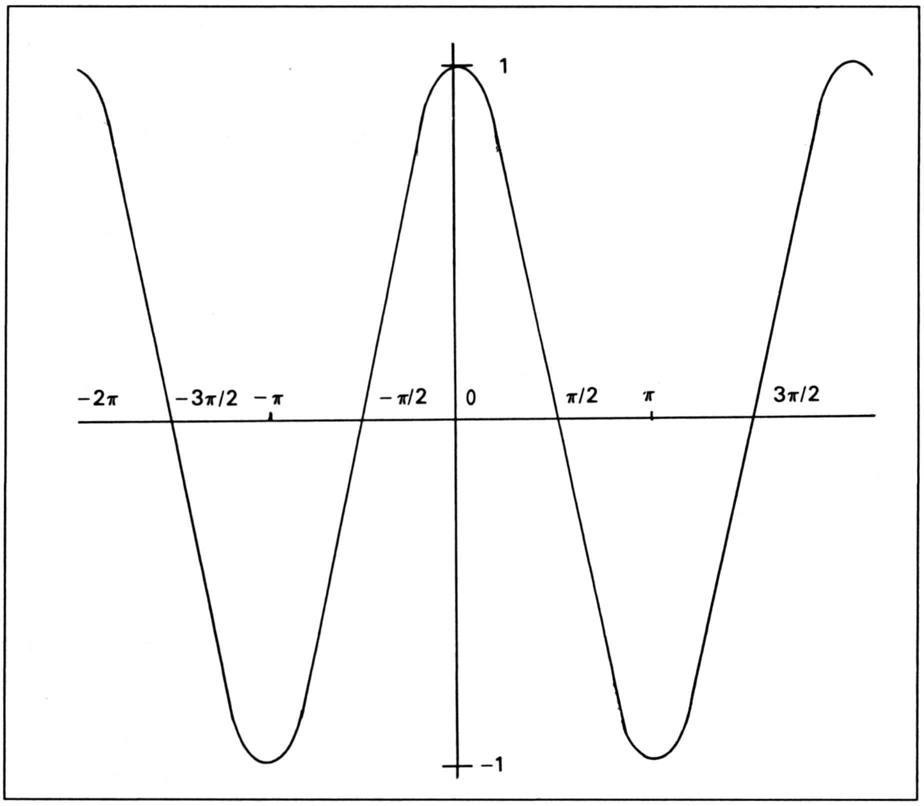
x varie de π à $3\pi/2$, le point C décrit [A'O] de A' à O donc cos(x) croît de -1 à 0

x varie de $3\pi/2$ à 2π, le point C décrit [OA] DE O à A donc cos(x) croît de 0 à 1.

On peut écrire ces résultats dans un tableau appelé tableau de variation.

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
cos(x)	1	0	-1	0	1

Courbe représentative



On remarque que $\forall x$, $\cos(-x) = \cos(x)$. La fonction cosinus est une fonction paire (symétrie par rapport à l'axe des ordonnées).

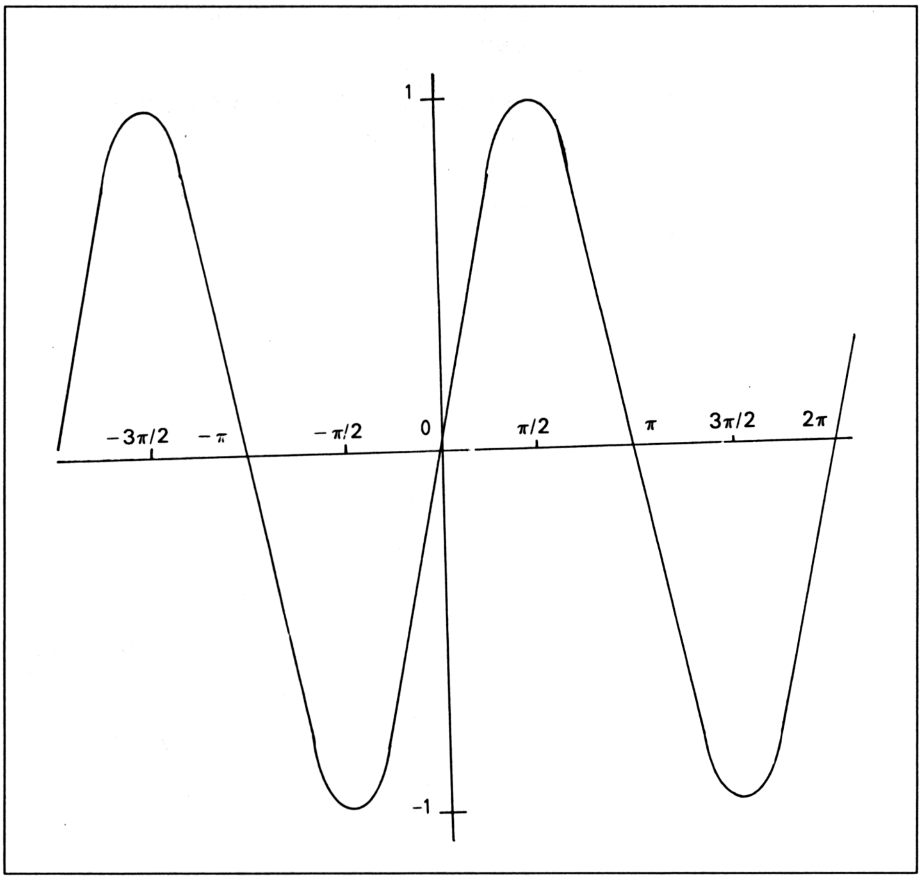
- Fonction SINUS

Pour étudier le sens de variation de la fonction sinus on procédera de la même manière, mais cette fois-ci en prenant le point S.

Tableau de variation

x	0		$\pi/2$		π		$3\pi/2$		2π
$\sin x$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

Courbe représentative



On remarque que $\forall x$, $\sin(-x) = -\sin(x)$. La fonction sinus est une fonction dite impaire (symétrie par rapport à 0).

• Fonction TANGENTE

On a définit dans le chapitre géométrie que

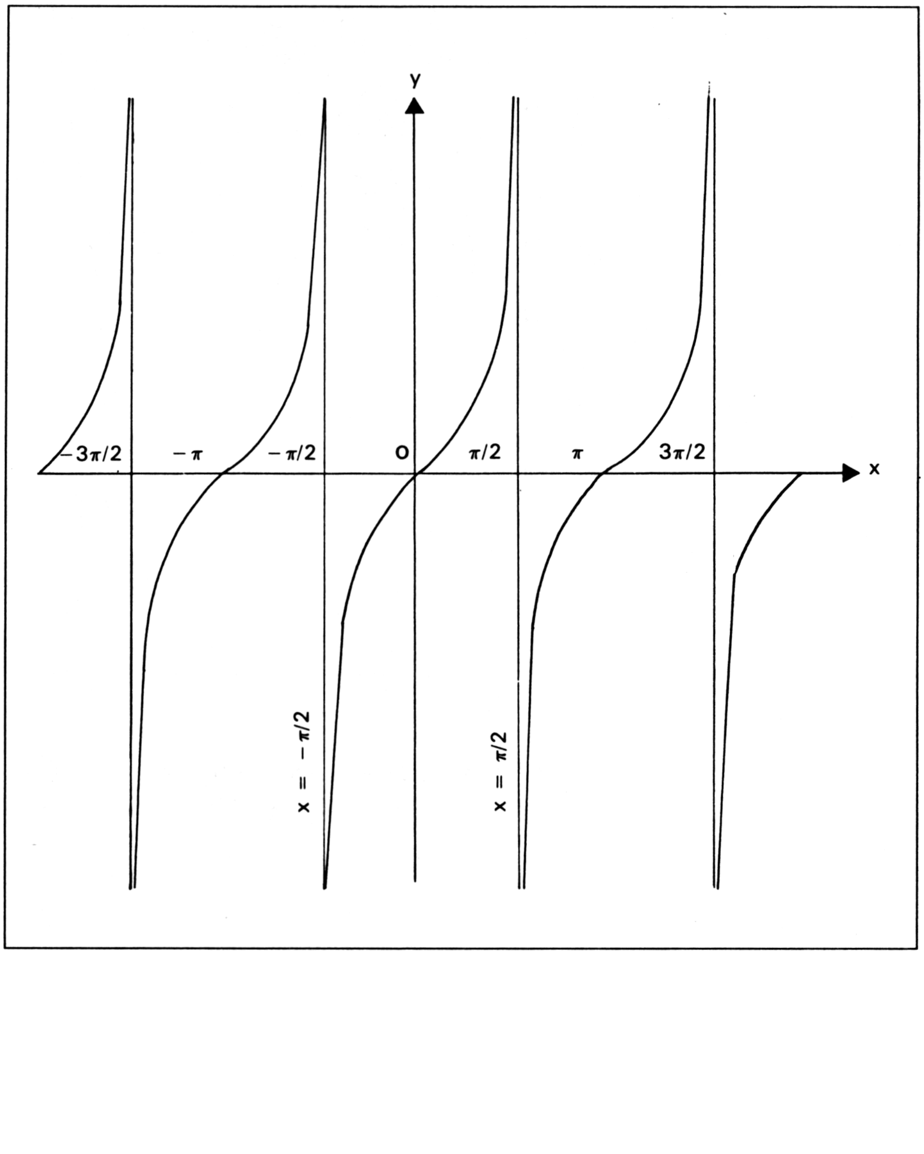
Tangente(x) = sin(x) / cos/(x).

Tangente (x) est représentée sur la courbe suivante par la mesure algébrique $\overrightarrow{AT}$. Tg(x) sera définie pour des valeurs de x différentes de $\pi/2 + k\pi$ ($k \in Z$), car pour ces valeurs le cosinus = 0 et une fraction du style a/0 ($a \in \mathbb{R}$) tend vers l'infini noté ∞.

Si on prend une valeur x, $tg(x) = \sin(x)/\cos(x)$ et $tg(x+\pi) = \sin(x+\pi)/\cos(x+\pi) = -\sin(x)/-\cos(x) = tg(x)$

La fonction tangente est donc une fonction de période π, $\forall x \in \mathbb{R}$: $tg(x) = tg(x+\pi)$, on l'étudiera donc de $-\pi/2$ à $\pi/2$ et on reportera la courbe dans les autres intervalles.

Les droites $x = \pi/2 + k\pi$ sont appelées ASYMPTOTES à la courbe, celle-ci ne touche jamais les droites, mais s'en approche indéfiniment.



Quelques valeurs remarquables pour cos, sin et tg

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
cos(x)	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1
sin(x)	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
tg(x)	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}/3$	0
x		$7\pi/6$	$5\pi/4$	$4\pi/3$	$3\pi/2$	$5\pi/3$	$7\pi/4$	$11\pi/6$	2π
cos(x)		$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-1/2$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
sin(x)		$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-1/2$	0
tg(x)	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}/3$	0

II. Relation entre les fonctions

Dans le triangle rectangle OCM

$\overline{OC}^2 + \overline{CM}^2 = \overline{OM}^2$ mais $\overline{CM} = \overline{OS}$ et $\overline{OM} = 1$ donc

$\overline{OC}^2 + \overline{OS}^2 = 1$ avec $\overline{OC} = \cos(x)$ et $\overline{OS} = \sin(x)$

$\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$

- Formules d'addition

Dans le repère $(0, \vec{OA}, \vec{OB})$

a) $\vec{OM} = \cos(x).\vec{OA} + \sin(x).\vec{OB}$

b) $\vec{OM}' = \cos(x+\pi/2)\ .\ OA + \sin(x+\pi/2)\ .\ \vec{OB}$

$\vec{OM}' = -\sin(x).\vec{OA} + \cos(x).OB$

c) $\vec{ON} = \cos(x+y).\vec{OA} + \sin(x+y).\vec{OB}$

Dans le repère $(O, \vec{OM}, \vec{OM}')$

d) $\vec{ON} = \cos(y).\vec{OM} + \sin(y).\vec{OM}'$

On remplace dans d) $\vec{OM}$ et $\vec{OM}'$ par a) et b)

On trouve :

$\vec{ON} = \cos(y).(\cos(x).\vec{OA} + \sin(x).\vec{OB}) + \sin(y).(-\sin(x).\vec{OA} + \cos(x).\vec{OB})$

$\vec{ON} = (\cos(y)\cos(x) - \sin(y)\sin(x)).\vec{OA} + (\cos(y)\sin(x) + \sin(b)\cos(x)).\vec{OB}$

Donc en faisant l'équivalence entre c) et e) on a :

$$\boxed{\begin{aligned}\cos(x+y) &= \cos(y)\cos(x) - \sin(y)\sin(x)\\ \sin(x+y) &= \cos(y)\sin(x) + \sin(y)\cos(x)\end{aligned}}$$

Avec le même genre de démonstration, on aurait :

$$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$$
$$\sin(x-y) = \cos(y)\sin(x) - \sin(y)\cos(x)$$

Par suite

$$tg(x+y) = (tg(x) + tg(y))/(1 - tg(x)tg(y)$$
$$tg(x-y) = (tg(x) - tg(y))/(1 + tg(x)tg(y)$$

- Formules de duplication

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2.\cos^2 x - 1 = 1 - \sin^2 x$$
$$\sin 2x = 2.\sin x.\cos x$$
$$tg2x = 2.tgx/(1 - tg^2 x)$$

- **Somme et différence de 2 cosinus**

Elles s'obtiennent en utilisant les formules d'addition.

$$\cos(x) + \cos(y) = 2.\cos((x+y)/2).\cos((x-y)/2)$$
$$\cos(x) - \cos(y) = -2.\sin((x+y)/2).\sin((x-y)/2)$$

13/2.4

Notions d'analyse

13/2.4.1

Aperçu sur les fonctions polaires et paramétriques en sinus et cosinus

Prenons comme exemple un cercle C de rayon R dans un repère orthonormé (O, I, J).

Soit le point $M(x, y) \in C$: $\begin{cases} x = R.\cos\Theta \\ y = R.\sin\Theta \end{cases}$

Ces 2 équations sont appelées équations paramétriques.

Soit le point M, à chaque angle Θ correspond une mesure algébrique $\overline{OM}$. On peut dire que OM est une fonction de Θ et on note $\overline{OM} = f(\Theta)$. Cette équation est appelée équation polaire.

$OM = \sqrt{(R^2\cos\Theta^2 + R^2\sin\Theta^2)} = R\sqrt{(\cos^2\Theta + \sin^2\Theta)} = R\sqrt{1} = R$

Dans le cas du cercle $f(\Theta) = cste = R, \forall\Theta$

Equations polaires

Il existe une infinité d'équations polaires. Nous allons en étudier une sans entrer dans les détails d'une étude complète faisant appel à des notions qui sortiraient du cadre de cet ouvrage.

Soit $f(\Theta) = \sqrt{2}.\sin 2\Theta$

Le sinus est une fonction définie sur R donc : $Df = R$
(Df est l'ensemble de définition c.a.d l'ensemble des éléments Θ qui ont une image par f).

$f(\Theta + \pi) = \sqrt{2}.\sin 2(\Theta + \pi) = \sqrt{2}.\sin(2\Theta + 2\pi) = \sqrt{2}.\sin(2\Theta)$

donc $f(\Theta + \pi) = f(\Theta)$: Symétrie par rapport à O.

$f(-\Theta) = \sqrt{2}.\sin(-2\Theta) = -\sqrt{2}.\sin(2\Theta) = -f(\Theta)$

f est impaire donc symétrique par rapport à l'axe y'Oy.

$f(\pi/2 - \Theta) = \sqrt{2}.\sin 2(\pi/2 - \Theta) = \sqrt{2}.\sin(\pi - 2\Theta) = f(\Theta)$

on aura donc une symétrie par rapport à la bissectrice de l'angle xOy, c.a.d à $\Theta = \pi/4$.

On étudiera la courbe de 0 à $\pi/4$ dont on trouvera la représentation sur la figure 1.

Pour ceci, calculons $f(\Theta)$ pour des valeurs choisies de Θ variant de 0 à $\pi/4$.

$\Theta = 0$	$\sin 0 = 0$	donc $f(0)$	$= OM = 0$
$\Theta = \pi/12$	$\sin 2\pi/12 = 1/2$	donc $f(\pi/12)$	$= ON = \sqrt{2}/2$
$\Theta = \pi/8$	$\sin 2\pi/8 = \sqrt{2}/2$	donc $f(\pi/8)$	$= OP = 1$
$\Theta = \pi/6$	$\sin 2\pi/6 = \sqrt{3}/2$	donc $f(\pi/6)$	$= OQ = \sqrt{6}/2$
$\Theta = \pi/4$	$\sin 2\pi/4 = 1$	donc $f(\pi/4)$	$= OS = \sqrt{2}$

On trace les points dans un repère orthonormé :

— point M, $\overline{OM} = 0$, donc $M = 0$

— point N, on trace la droite faisant un angle de $\pi/12$ avec l'axe x'Ox et on trace sur cette droite le point N à une distance de $\sqrt{2}/2$ de O.

— On procède de la même manière avec les points P, Q et S.

— On rejoint les points M, N, P, Q, S par une courbe approximative.

— Comme f est symétrique par rapport à $\Theta = \pi/4$ on trace les points Q', P', N'.

— f est symétrique par rapport à $\Theta = \pi/2$, on trace donc le symétrique de ce que l'on vient de tracer par rapport à l'axe y'Oy.

— Comme f est aussi symétrique par rapport à 0, on trace les symétriques des 2 parties 5 et 6, par rapport à 0.

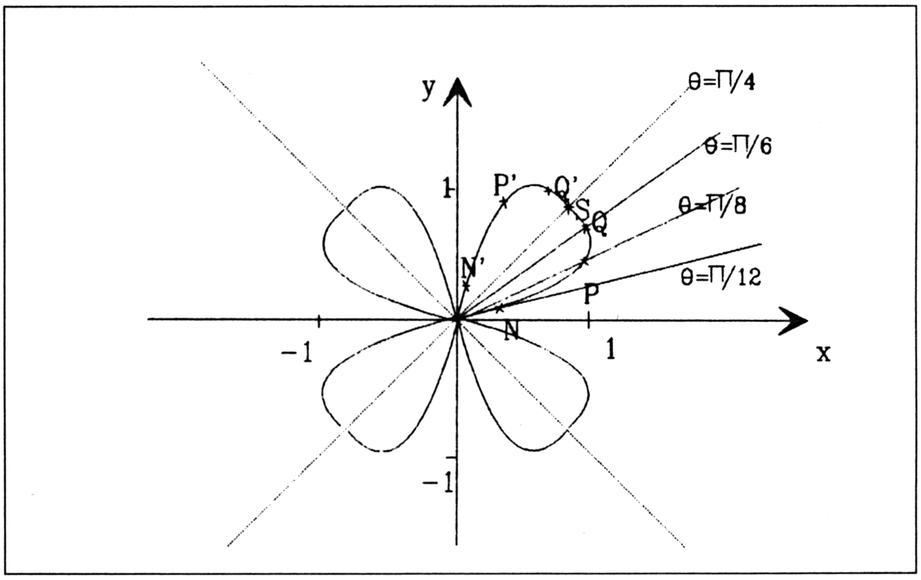


Fig. 1

Remarque :

En ajoutant un angle de déphasage α dans la fonction, on obtient la même courbe (Fig. 2) après une rotation de l'angle α autour du point 0.

Exemple : $f'(\Theta) = \sqrt{2}.\sin(2\Theta + \pi/2)$

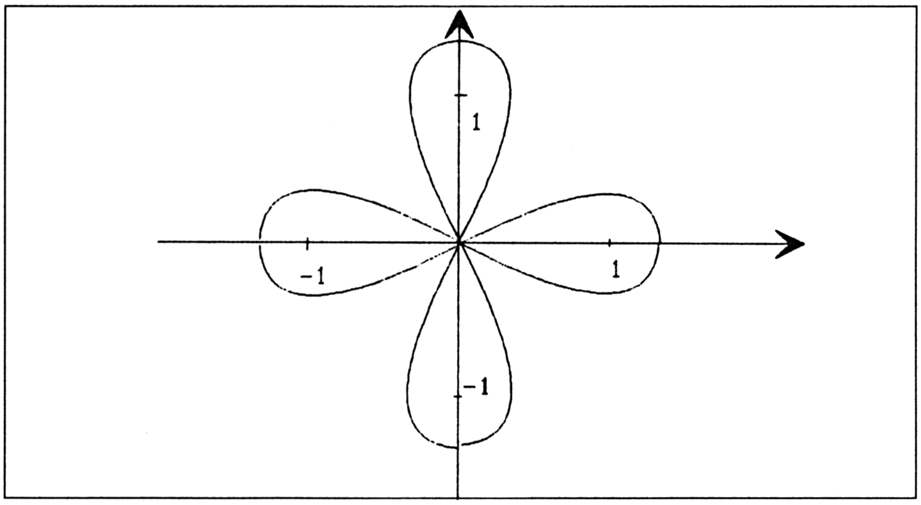


Fig. 2

Voir aussi le programme ''POLAIRE'' ci-dessous :

```
10 REM copyright WEKA 1989
20 DEG
30 INK 0,0:INK 1,13:INK 2,16:INK 3,12
40 PAPER 0
50 CLS
60 INPUT "Entrez la vitesse angulaire"; omega
70 INPUT "Entrez l'amplitude";A
80 INPUT "Entrez la phase @ l'origine";teta
90 MODE 1
100 FOR t = 1 TO 360
110 MOVE 320,400
120 DRAW 320,0,1
130 MOVE 0,200
140 DRAW 640,200,1
150 MOVE 100,200
160 e=COS(omega*t)
170 IF e=0 GOTO 270
180 ro = 100*A*SIN(omega*t+teta)
190 x  =320+ ro*COS(t+teta)
200 y  = 200+ ro*SIN(t+teta)
210 IF t>1 GOTO 240
220  x1=x : y1=y
230 GOTO 270
240 PLOT x1,y1
250 DRAW x,y,2
260 x1=x : y1=y
270 NEXT t
280 END
```

EQUATIONS PARAMÉTRIQUES

Soit une courbe plane définie par une représentation graphique (Fig. 3) de la forme $\overline{OM} = x(t)*i + y(t)*j$ où x et y sont des fonctions d'une même variable t appelée paramètre, et aussi les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

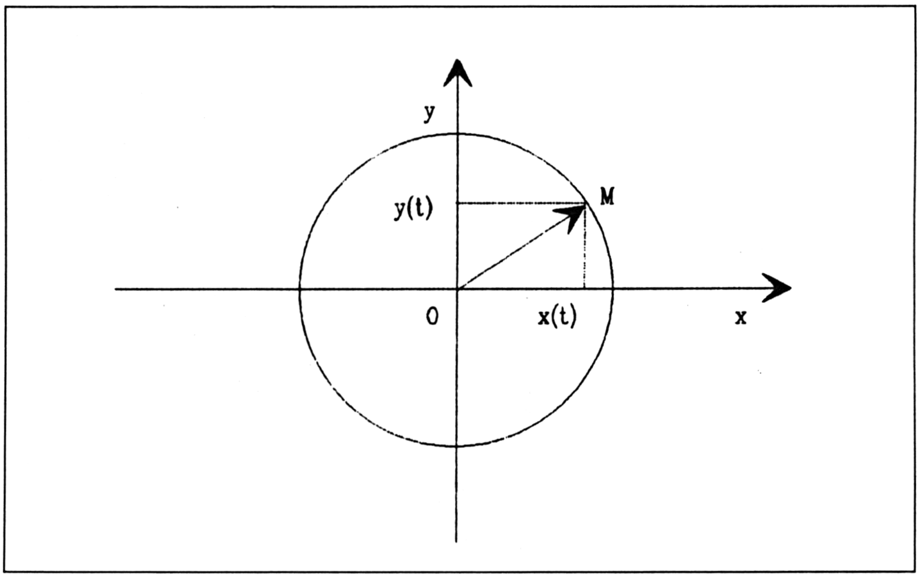


Fig. 3

Pour tracer la courbe, nous donnerons différentes valeurs à t et obtiendrons les valeurs correspondantes de x et y.

Soit l'exemple : $\begin{cases} x(t) = \sin 2t \\ y(t) = \sin 3t \end{cases}$

Etude de la fonction :

- les fonctions sin2t et sin3t sont définies sur R donc Df = R.
- pour réduire au minimum l'intervalle d'étude, on va chercher la plus petite période commune aux 2 fonctions et chercher, si elles existent, des symétries.
- période de x(t) :

Il faut trouver la plus petite valeur T différente de 0 telle que $x(t) = x(t+T)$.

Soit $\Theta = t+T$ on a $\sin 2\Theta = \sin 2(t+T) = \sin(2t+2T)$,

on a vu que la période de la fonction sinus est 2π. Il faut donc que

$$\begin{aligned} \sin(2t+2T) &= \sin(2t+2\pi) \\ 2t+2T &= 2t + 2\pi \\ 2T &= 2\pi \\ T &= \pi \end{aligned}$$

La période de x(t) est π et on a :

$\forall\ t \in R,\ x(t) = x(t+\pi)$

De même pour la période de y(t) on trouverait :

$T = 2\pi/3$
$\forall t \in R$, $y(t) = y(t + 2\pi/3)$

La plus petite période commune à x et y est 2π.
L'intervalle d'étude $E = [0;2\pi]$

- Recherche de symétries :

$\forall t \in R$, $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$ car la fonction sinus est une fonction impaire donc il existe une symétrie / O, l'intervalle d'étude devient $E = [0,\pi]$.

$\forall(t)$ $x(\pi - t) = -x(t)$ et $y(\pi - t) = y(t)$ donc la courbe présente une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées yy'. L'intervalle d'étude devient $E = [0, \pi/2]$.

- Représentation graphique (Fig. 4) :

On se donne donc des valeurs de t variant de 0 à $\pi/2$ et on calcule x(t) et y(t).

points	**O**	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**
t	0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
x(t)	0	1/2	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	0
y(t)	0	$\sqrt{2}/2$	1	$\sqrt{2}/2$	0	-1

Dans un repère orthonormé, on trace les points O, A, B, C, D, E et on les joint par une courbe.

De cette courbe on trace le symétrique par rapport à l'axe yy' (courbe EFGHIO).

Ensuite le symétrique / O (courbe en trait interrompu).

APPLICATION : TENSIONS AUX BORNES D'UN OSCILLOGRAPHE

- Fonctions sinusoïdales du temps (Fig. 5)

Soit un repère orthonormé et un vecteur $\overrightarrow{OM}$, de norme a, tournant à la vitesse angulaire constante Ω dans le sens trigonométrique (Ω en radian/seconde).

Pour parcourir l'angle Θ le vecteur a mis un certain temps t tel que $\Theta = \Omega * t$.

Soit le point s : $\overline{OS} = a * \sin(\Theta + \alpha)$

$\overline{OS} = a * \sin(\Omega * t + \alpha)$

$\overline{OS} = a * \sin(2 * \pi * t/T + \alpha)$ où $T = 2\pi/\Omega$.

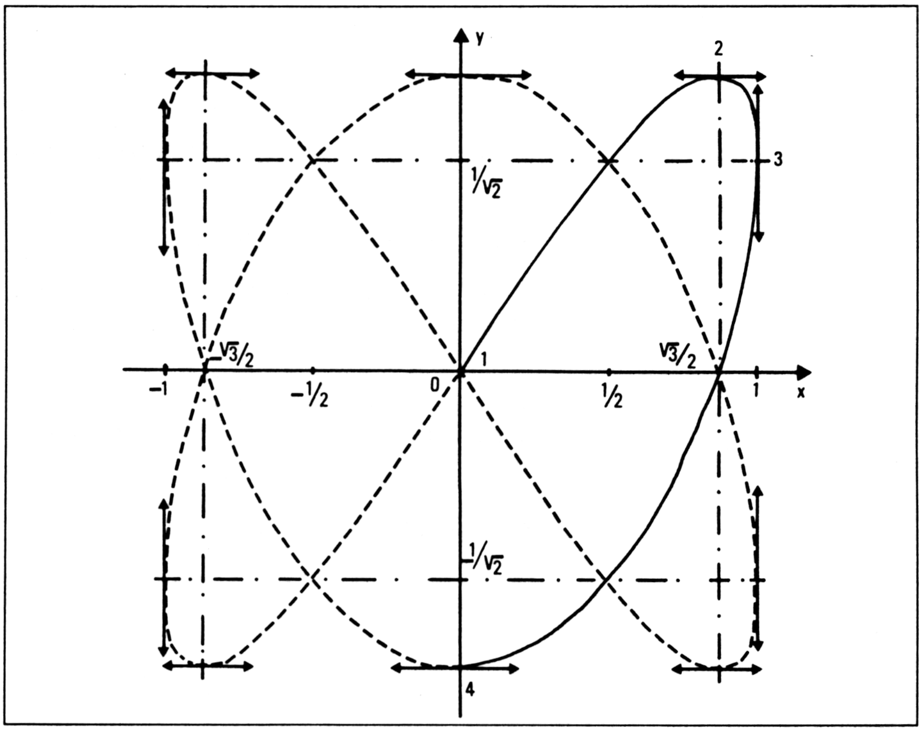


Fig. 4

$\overline{\mathbf{OS}}$ est donc une fonction sinusoïdale du temps.
a est appelée amplitude ou valeur maximum que peut prendre la fonction.
α est appelée phase à l'origine (position initiale du vecteur).
T appelée période c.a.d le temps mis par le vecteur pour faire un tour (2π).

De même la fréquence f = 1/T en hertz qui représente le nombre de tours par seconde.

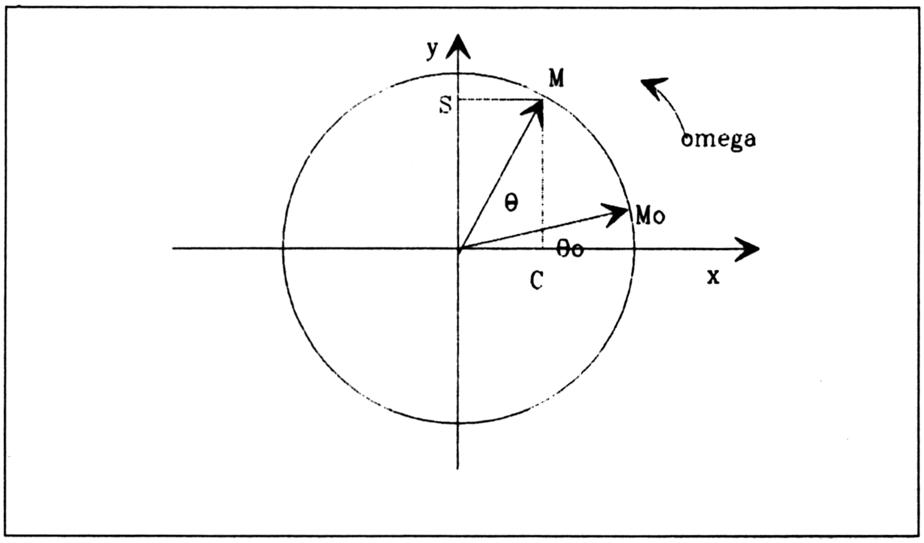


Fig. 5

Le programme ''SINUS'' vous permettra de mieux comprendre l'évolution de la fonction avec le temps.

- Somme de 2 fonctions sinusoïdales du temps de même période.

Représentation de FRESNEL.

```
10 REM copyright WEKA 1989
20 MODE 1
30 DEG
40 INK 0,0:INK 1,13:INK 2,16
50 PAPER 0
60 CLS
70 INPUT "Entrez la phase @ l'origine en degr{s";alfa
80 INPUT "Entrez la vitesse angulaire en degr{s par seconde";omega
90 T=360/omega:CLS
100  LOCATE 1,23:PRINT" la p{riode est ";T;"secondes"
110  LOCATE 1,24:PRINT" la phase @ l'origine est";alfa;"degr{s"
120 LOCATE 1,25:PRINT " la fr{quence est ";1/T;" Hertz"
130 MOVE 0,200:DRAW 190,200,1:MOVE 220,200:DRAW 639,200,1
140 MOVE 610,200:DRAW 610,195,1
150 MOVE 250,40:DRAW 250,399,1
160 MOVE 100,40:DRAW 100,399
170 LOCATE 6,4:PRINT "y":LOCATE 15,4:PRINT "y"
180 LOCATE 13,14:PRINT "x":LOCATE 39,12 :PRINT "t":LOCATE 36,14:PRINT"360 s"
190 LOCATE 1,1:PRINT"trac{ du cercle trigonom{trique"
200 FOR t=0 TO 360
210 PLOT 100+77*COS(t),200+77*SIN(t),1
220 NEXT
230 LOCATE 1,1 :PRINT"le vecteur de Fresnel tourne, tra\{ de   la sinusoide pou
";omega;" p{riodes"
240 FOR t=0 TO T
250 MOVE 177,200
260 DRAW 23,200,1:MOVE 100,123
270 DRAW 100,277,1:MOVE 100,200
280 DRAW 100+75*COS(omega*t+alfa),200+75*SIN(omega*t+alfa),0
290 MOVE 100,200
300 DRAW 100+75*COS(omega*(t+1)+alfa),200+75*SIN(omega*(t+1)+alfa),2
310 x=250+(t):y=200+77*SIN(omega*t+alfa)
320 MOVE x,y
330 DRAW 250+(t+1),200+77*SIN(omega*(t+1)+alfa),2
340 NEXT
350 LOCATE 1,1: PRINT"trac{ termin{
                     "
```

Prenons 2 fonctions sinusoïdales :

$$f(t) = a * \sin(\omega * t + \alpha 1)$$
$$g(t) = b * \sin(\omega * t + \alpha 2)$$

avec a, norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$ et b, norme de $\overrightarrow{ON}$

A l'instant t = 0 le vecteur $\overrightarrow{OM}$ fera un angle de $\alpha 1$ avec ox puisque wt = 0, de même $\overrightarrow{ON}$ fera un angle $\alpha 2$ avec ox. Nous représenterons donc les 2 vecteurs à t = 0. Cette représentation est appelée représentation de FRESNEL (Fig. 6).

$(\alpha 1 - \alpha 2)$ est appelé DEPHASAGE entre les 2 fonctions.

Cette représentation permet de faire la somme ou la différence de plusieurs fonctions de même fréquence grâce aux propriétés des vecteurs et ainsi de trouver graphiquement son amplitude et sa phase à l'origine sachant que w sera sa vitesse angulaire. Le vecteur somme sera la diagonale du parallélogramme.

Exemple : $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$

$s(t) = \overline{OS} * \sin(\omega * t + \alpha)$

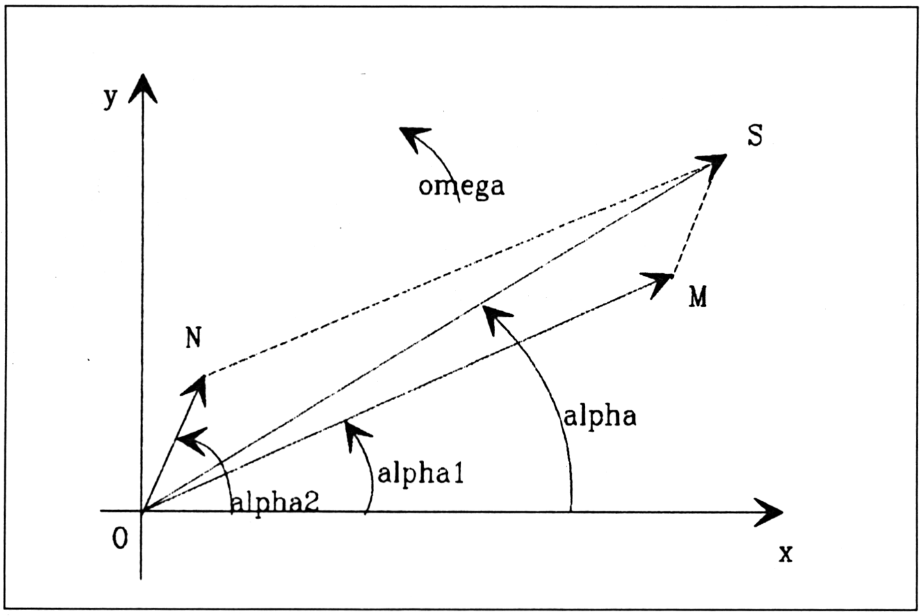


Fig. 6

Nota : l'amplitude et la phase de la somme peuvent être aussi calculées.

- Somme de 2 fonctions sinusoïdales de périodes différentes

La représentation de Fresnel n'est plus valable.

Le parallélogramme OMSN se déforme car les vitesses angulaires sont différentes. Aussi pour trouver la fonction somme on passe par des calculs compliqués qui ne seront pas développés ici.

Le programme ''SOMME'' vous permettra de mieux comprendre l'évolution du vecteur somme de deux vecteurs ou plus.

```
10 REM copyright WEKA 1989
20 DIM as(4),bs(4),cs(4),ds(4),vitesse(4),phase(4),periode(4),maxi(4)
30 MODE 2
40 DEG
50 INK 0,0:INK 1,13:INK 2,16:INK 3,12
60 PAPER 0
70 CLS
80 INPUT "Entrez le nombre de fonctions < 5 ";n
90 FOR i=1 TO n
100 PRINT "FONCTION ";i
110 INPUT "Entrez la phase @ l'origine  en degr{s ";phase(i)
120 INPUT "Entrez la vitesse angulaire  en degr{s/s";vitesse(i)
130 INPUT "Entrez l'amplitude maxi en pixels ( < 75 ) ";maxi(i)
140 periode(i)=360/vitesse(i)
150 T = MAX(T,periode(i))
160 NEXT i
170 MODE 1
180 CLS
190 FOR t=0 TO 360
200  LOCATE 1,23
210 REM  TRACE DES AXES
220  LOCATE 1,24
230 LOCATE 1,25
240 MOVE 0,200:DRAW 190,200,1:MOVE 220,200:DRAW 639,200,1
250 MOVE 610,200:DRAW 610,195,1
260 MOVE 250,40:DRAW 250,399,1
270 MOVE 100,40:DRAW 100,399
280 LOCATE 6,4:PRINT "y":LOCATE 15,4:PRINT "y"
290 LOCATE 13,14:PRINT "x":LOCATE 39,12 :PRINT "t":LOCATE 36,14:PRINT"360 s"
300 FOR i = 1 TO n
310 MOVE 200,200
320 DRAW 23,200,1:MOVE 100,123
330 DRAW 100,277,1:MOVE 100,200
340 omega=vitesse(i)
350 alfa=phase(i)
360 norme=maxi(i)
370 GOSUB 620
380 as(i)=a
390 bs(i)=b
400 cs(i)=c
410 ds(i)=d
420 NEXT i
430 REM vecteur somme
440 a=0:b=0:c=0:d=0
450 FOR i=1 TO n
460 a = a + as(i)
470 b = b + bs(i)
480 c = c + cs(i)
490 d = d + ds(i)
500 NEXT i
510 MOVE 100,200
520 DRAW 100+a,200+b,0
530 MOVE 100,200
540 DRAW 100+c,200+d,1
550 xs = 250+(t):ys = 200+b
560 MOVE xs,ys
570 DRAW 250+(t+1),200+d,1
580 NEXT
590 LOCATE 1,1: PRINT"trac{ termin{
                    "
```

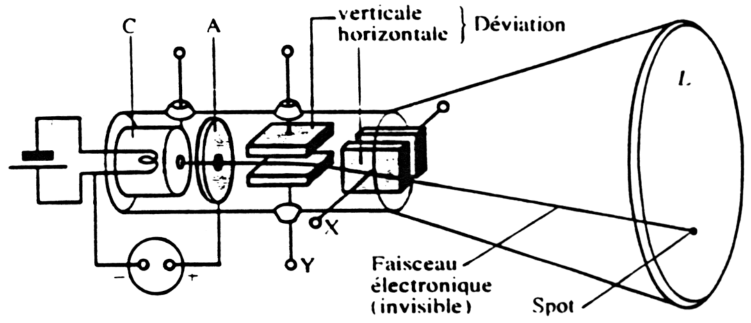
```
600 END
610 REM  Sous-programme de trac{
620 a = norme*COS(omega*t+alfa)
630 b = norme*SIN(omega*t+alfa)
640 c = norme*COS(omega*(t+1)+alfa)
650 d = norme*SIN(omega*(t+1)+alfa)
660 DRAW 100+a,200+b,0
670 MOVE 100,200
680 DRAW 100+c,200+d,2
690 x=250+t  :  y=200+b
700 MOVE x,y
710 DRAW 250+(t+1),200+d,2
720 RETURN
```

Attention : le temps défini dans les programmes ne correspond pas au temps réel.

- Oscillographe (Fig. 7)

Un oscillographe est un accélérateur d'électrons (particules chargées négativement). Il dévie ceux-ci d'abord entre 2 plaques horizontales et ensuite entre 2 plaques verticales. Entre ces plaques existe un champ électrique dû à une différence de potentiel appelée aussi tension. Il va permettre de visualiser et d'étudier la tension verticale (externe) grâce à un balayage horizontal dû à une tension interne en dent de scie dont on peut faire varier la fréquence.

Cette tension sera matérialisée par la persistance de la trace du faisceau sur le spot lumineux.



Cathode C : produit en permanence, quand elle est chauffée, un faisceau d'électrons.

Anode A : attire les électrons car elle est portée à une tension électrique qui accélère les électrons émis par la cathode.

Plaques X et Y soumises à la tension du signal à étudier : elles impriment aux électrons des déplacements directement en rapport avec le signal.

Fig. 7 : Coupe d'un tube d'oscillographe.

Nous pouvons donc considérer que la courbe sur l'écran est une représentation graphique de 2 fonctions paramétriques x(t) en horizontal et y(t) en vertical.

Nota : Les tensions sinusoïdales sont définies par la lettre u et s'écriront de la forme :

$u(t) = U*\sin(\Omega*t + \Theta)$

U est appelée tension maximale.

- Tension sinusoïdale en y et tension en dents de scie en x (Fig. 8)

Soit x(t) telle que sa période soit 2π

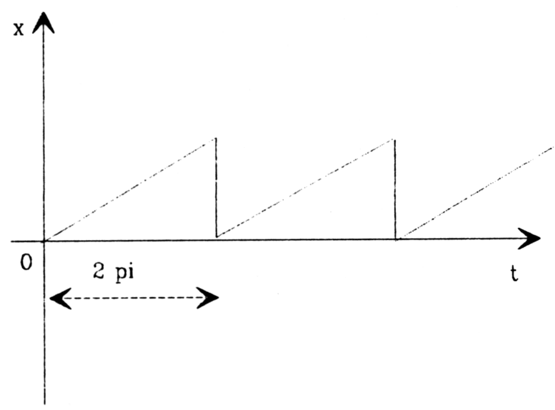


Fig. 8

soit $y(t) = \sin(t)$

En faisant varier t de 0 à 2π, on obtient des points dont les coordonnées sont (x(t), y(t)) et donc la courbe ci-dessous, sur l'écran de l'oscillographe (Fig. 9).

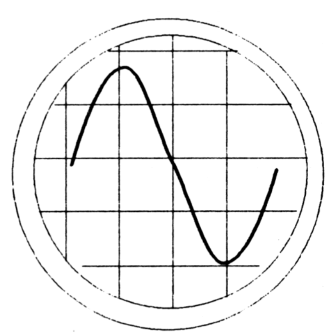


Fig. 9

• Tension sinusoïdale en y et tension sinusoïdale en x.

Nous pouvons shunter la tension interne de l'oscillographe par une tension externe. Choisissons celle-ci telle qu'elle soit sinusoïdale. Deux cas peuvent se produire :

1) Les rapports entre les 2 périodes sont des fractions irréductibles.

Exemple : $T1 = 2\pi/3$ et $T2 = 2\pi/11$
$T = T1/T2 = 11/3$ et $T' = T2/T1 = 3/11$

ces 2 nombres sont illimités. En conséquence la courbe ne sera pas fermée sur elle-même.

2) Un au moins des rapports est un nombre décimal.

Exemple : $T1 = 2\pi/2$ et $T2 = 2\pi/11$
$T = T1/T2 = 11/2$ et $T' = T2/T1 = 2/11$ $T = 5.5$ est un nombre décimal. Donc dans une période commune de 2π, nous aurons T1 égale à 5,5 fois T2. La courbe sera fermée. Le programme « FCTPARA » ci-après permet de tracer des courbes paramétriques en sinus. Il vous suffit d'entrer les périodes, les déphasages et les amplitudes en pixels.

```
10 REM copyright WEKA 1989
20  REM  Ce programme permet de tracer des fonctions param{triques
30  REM  Il est possible de changer les fonctions dans les lignes
40  REM  correspondantes du  programme.
50 DEG
60 INK 0,0:INK 1,13:INK 2,16:INK 3,12
70 PAPER 0
80 CLS
90 INPUT "Entrez la vitesse angulaire de x"; wx
100 INPUT "Entrez la phase @ l'origine de x "; tetax
110 INPUT "Entrez l'amplitude de x en pixels"; Ax
120 INPUT "Entrez la vitesse angulaire de y"; wy
130 INPUT "Entrez la phase @ l'origine y"; tetay
140 INPUT "Entrez l'amplitude de y en pixels"; Ay
150 MODE 1
160 LOCATE 38,12:PRINT "x"
170 LOCATE 22,2 :PRINT "y"
180 REM   Trace des axes
190 MOVE 320,400
200 DRAW 320,0,1
210 MOVE 0,200
220 DRAW 640,200,1
230 FOR t = 1 TO 360
240 MOVE 320,200
250 LOCATE 1,1:PRINT "t=";t
260 x = Ax*SIN(wx*t+tetax)
270 y = Ay*SIN(wy*t+tetay)
280 MOVE 320+x,200+y
290 x1 = Ax*SIN(wx*(t+1)+tetax)
300 y1 = Ay*SIN(wy*(t+1)+tetay)
310 DRAW 320+x1,200+y1,2
320 NEXT t
330 END
```